2020年广东省赛复赛例题&练习答案

例1 (CNAO 2013低) **行星**

解：设合时地球到行星的距离为r_1，冲时为r_2，则$0.85 = m_1 = m_2 = -2.5\lg\dfrac{1/r_1^2}{1/r_2^2}$，可得$R = \dfrac{r_1/r_2+1}{r_1/r_2-1} = 5.1745\ \mathrm{AU}$，即为木星．木星从合到冲的过程是一个追及问题，设地球轨道周期为T_E，木星轨道周期T．根据开普勒第三定律$\dfrac{r^3}{T^2} = \dfrac{r_\mathrm{E}^3}{T_\mathrm{E}^2}$，代入$T_\mathrm{E} = 1$ a, $r_\mathrm{E} = 1$ au, $r = 5.1745$ au可得，$T = 11.77$ a．由会合周期$\dfrac{1}{P} = \dfrac{1}{T_\mathrm{E}} - \dfrac{1}{T}$，得$P = 399.2$天．依题意，由合到冲经历时间为半个会合周期，即199.6天．

例2 (CNAO 2012低&高) **星等**

解：先通过口径算出此望远镜的目视极限星等(应该是16等)，比冥王星暗2等，得到视亮度为冥王星的1/6.31，即表面积是冥王星的1/6.31，则半径是冥王星的$(1/6.31)^{0.5} = 39.8\%$.

例3 (USAAAO NAO 2021)

解：我们先写出

$$m_\mathrm{unit} - m_\mathrm{total} = -2.5\lg\left(\frac{F_\mathrm{unit}}{F_\mathrm{total}}\right)$$

$$m_\mathrm{unit} - m_\mathrm{total} = -2.5\lg\left(\frac{\Omega_\mathrm{unit}}{\Omega_\mathrm{total}}\right)$$

$$m_\mathrm{unit} = -2.5\lg(\Omega_\mathrm{unit}) + 2.5\lg(\Omega_\mathrm{total}) + m_\mathrm{total}$$

其中m_unit是表面星等，即1球面度内的星等；m_total是星系的实际星等；F_unit是1球面度内的流量；F_total是星系的总流量；Ω_unit是1球面度；Ω_total是星系的总立体角．

我们需要证明m_unit与距离d无关．为此，我们推出：

$$2.5\lg(\Omega_\mathrm{total}) = 2.5\lg\left(\frac{A}{d^2}\right)$$

$$2.5\lg(\Omega_\mathrm{total}) = 2.5\lg(A) - 5\lg(d)$$

其中A是星系的实际面积，d是它的距离．同时，由距离模数公式，我们得到：

$$m_\mathrm{total} = M_\mathrm{total} + 5\lg(d) - 5$$

其中M_total是星系的绝对星等．综上，我们得到：

$$m_\mathrm{unit} = -2.5\lg(\Omega_\mathrm{unit}) + 2.5\lg(A) + M_\mathrm{total} - 5$$

与距离无关．得证．

例4 (CNAO 2013低&高) **老人星**

解：**(1)** 在昆明(北纬24°57′) 地区可以升起的恒星赤纬$\delta > -90° + 24°57' = -65°3'$，老人星的赤纬$\delta$为$-52°43'$，因此可以升起．

(2) 老人星上中天时恒星时与赤经相等($S = \alpha + t$, $t = 0$所以$S = \alpha$)．已知老人星的赤经为$6^\mathrm{h}24^\mathrm{m}$，因此上中天时的恒星时为$6^\mathrm{h}24^\mathrm{m}$．春分时刻的恒星时为地方平时$-12^\mathrm{h}$．考试时间为4月29日至4月30日，与今年春分日3月20日相差40.5天．因此平时与恒星时相差$12 - 24 \times 40.5/365.2422 = 9^\mathrm{h}20^\mathrm{m}$．因此老人星上中天为地方平时$6^\mathrm{h}24^\mathrm{m} + 9^\mathrm{h}20^\mathrm{m} = 15^\mathrm{h}44^\mathrm{m}$．昆明与北京时间(东经120°标准时)时差为$17.5° \times 4^\mathrm{m} = 1^\mathrm{h}10^\mathrm{m}$．因此老人星上在接下来24小时内中天的时间为北京时间4月29日$16^\mathrm{h}54^\mathrm{m}$.

(3) 由第1问我们得知老人星在昆明上中天时的地平高度也只有12°, 可观测时间很短. 当天昆明日落时间大约为19时30分, 也就是老人星上中天过后2.5小时才日落. 这时老人星的地平高度将降到5°以下, 因此无法观测.

例5 (CNAO 2013高) **双星**

解: **(1)** 由动量守恒定律$m_1r_1 = m_2r_2$, 且$r = r_1 + r_2$, 可得$r_1 = \dfrac{m_2}{m_1+m_2}r$, $r_2 = \dfrac{m_1}{m_1+m_2}r$. 根据万有引力定律, 对于主星有

$$G\frac{m_1m_2}{r^2} = m_1\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 r_1,$$

代入化简可得$T = \sqrt{\dfrac{4\pi^2r^2r_1}{Gm_2}} = 2\pi r\sqrt{\dfrac{r}{G(m_1+m_2)}}$.　　(1)

(2) 对于整个系统, 质量守恒, 总角动量守恒. 总质量$M = m_1 + m_2$是常数; 总角动量:

$$L = I\omega = (m_1r_1^2 + m_2r_2^2)\frac{2\pi}{T} = \frac{m_1m_2}{m_1+m_2}r^2\cdot\frac{2\pi}{T}$$

是常数, 所以$m_1m_2r^2T^{-1}$是常数.

当一小部分质量发生转移时, $m_1 \to m_1 + \Delta m$, $m_2 \to m_2 - \Delta m$, $r \to r + \Delta r$, $T \to T + \Delta T$, $m_1m_2r^2T^{-1}$可表示为$(m_1 + \Delta m)(m_2 - \Delta m)(r + \Delta r)^2(T + \Delta T)^{-1}$, 所以$(m_1 + \Delta m)(m_2 - \Delta m)(r + \Delta r)^2(T + \Delta T)^{-1} = m_1m_2r^2T^{-1}$,

$$\left(1+\frac{\Delta m}{m_1}\right)\left(1-\frac{\Delta m}{m_2}\right)\left(1+\frac{\Delta r}{r}\right)^2\left(1+\frac{\Delta T}{T}\right)^{-1} = 1.$$

展开化简并忽略二阶小量可得:

$$\left(1+\frac{\Delta m}{m_1}-\frac{\Delta m}{m_2}\right)\left(1+2\frac{\Delta r}{r}\right)\left(1-\frac{\Delta T}{T}\right) = 1,$$

$$\left(1+\frac{m_2-m_1}{m_1m_2}\Delta m\right)\left(1+2\frac{\Delta r}{r}-\frac{\Delta T}{T}\right) = 1,$$

$$1+\frac{m_2-m_1}{m_1m_2}\Delta m+2\frac{\Delta r}{r}-\frac{\Delta T}{T} = 1,$$

$$\frac{m_2-m_1}{m_1m_2}\Delta m = \frac{\Delta T}{T}-2\frac{\Delta r}{r}.\qquad(2)$$

由(1)式得$Tr^{-\frac{3}{2}}$是常数.

所以$(T+\Delta T)(r+\Delta r)^{-\frac{3}{2}} = Tr^{-\frac{3}{2}}$, 即$\left(1+\dfrac{\Delta T}{T}\right)\left(1+\dfrac{\Delta r}{r}\right)^{-\frac{3}{2}} = 1$,

$\left(1+\dfrac{\Delta T}{T}\right)\left(1-\dfrac{3}{2}\dfrac{\Delta r}{r}\right) = 1$, 则$\dfrac{\Delta r}{r} = \dfrac{2}{3}\dfrac{\Delta T}{T}$. 所以$\Delta r < 0$, 二者靠近.

由(2)式得: $\dfrac{m_2-m_1}{m_1m_2}\Delta m = \dfrac{\Delta T}{T}-2\dfrac{\Delta r}{r} = \dfrac{\Delta T}{T}-\dfrac{4}{3}\dfrac{\Delta T}{T} = -\dfrac{1}{3}\dfrac{\Delta T}{T}$, 所以$\Delta m < 0$, 物质由$m_1$到$m_2$.

例6 (CNAO 2016低&高) **金星勾陈一**

解: **(1)** 看不到. 黄赤交角可以视为180°的话, 就可以认为金星是完全倒过来自转的, 金星的北天极对应南黄极, 南天极对应北黄极. 所以, 金星北纬60°的居民, 相当于居住在黄纬的南纬60°, 只能看到黄纬的北纬30°以南的星空. 而北黄极位于天龙座, 离勾陈一(地球的北极星)的角距离远小于60°, 由此可知勾陈一的黄纬大于北纬30°, 因此不能被看到.

(2) 在地球上看，太阳视直径为30角分，到太阳1 au，所以在金星上看，太阳视直径为$30/0.72 = 41.7$角分. 因此人造卫星的视直径也要是41.7角分.

人造卫星绕金星做匀速圆周运动，万有引力产生向心力，因此：$\frac{GMm}{r^2} = mr\omega^2$，式中$G$为万有引力常数，为卫星到金星质心的距离，$M$为金星质量，$m$为卫星质量，$\omega$为卫星的角速度.

又有：$\omega = \frac{2\pi}{T}$，式中T为卫星公转周期.

两式联立并整理可得：$r^3 = \frac{GMT^2}{4\pi^2}$，

已知万有引力常数$G = 6.67 \times 10^{-11}$ ($\mathrm{N \cdot m^2/kg^2}$),

M、T均已知，带入计算可得：

$$r = 3.81 \times 10^5 \text{ km}.$$

因此，从金星表面上看卫星离观测者的距离为

$$r' = 3.81 \times 10^5 - 0.06052 \times 10^5 = 3.75 \times 10^5 \text{ km}.$$

在这个距离上, 41.7角分对应弧度为：

$$41.7 \times 60/206265 = 0.01213.$$

因此该卫星的直径为：

$$3.75 \times 10^5 \text{ km} \times 0.01213 = 4549 \text{ km}.$$

例7 (CNAO 2019高) **垂直发射的炮弹**

解：根据开普勒定律，该炮弹的轨迹为以地心为焦点的椭圆.

设在地面高度y时弹丸相对地心的角速度为$\omega(y)$，则在短时间$\mathrm{d}t$内，弹丸轨迹扫过的面积为$\frac{1}{2}\omega(y)\mathrm{d}t(R+y)(R+y)$，其中$R$为地球半径.

根据开普勒定律，单位时间内扫过的面积为常数，故有$\omega(y)(R+y)^2 \equiv \omega_0 R^2$, ω_0为地球自转角速度.

因$y \ll R$，故$\omega(y) = \omega_0 \frac{R^2}{(R+y)^2} \cong \omega_0 \left(1 - 2\frac{y}{R}\right)$.

因此，弹丸自飞离地面开始，其地心角速度一直小于地球自转角速度ω_0，故弹丸的落点位于炮口西侧.

【注】在本次决赛中，很多同学根据"弹丸水平方向速度保持恒定，因此地心角速度随着高度增加而减小"来推定炮弹落于西侧.

但这一论据是错误的. 如果在地面坐标系中观察，由于科里奥利力效应的存在，水平方向会产生速度;如果是在地心坐标系中观察，无论是水平速度(这里指对应发射时刻的水平方向)还是相对地心的切向速度都是变化的.

在从地面飞行至最高点的过程中，弹丸高度y与时间t有如下关系：$y = V_0 t - \frac{1}{2}gt^2$.

因$(\omega - \omega_0)$为弹丸地心角速度与地球自转角速度之差，故弹丸在地面投影位置的偏离速度(向东为正):

$$\mathrm{d}V = (\omega - \omega_0)R = -2\omega_0 y = -2\omega_0(V_0 t - \frac{1}{2}gt^2).$$

弹丸飞至最高点所需时间为:$T = \frac{V_0}{g}$.

以下可以采用多种方法估算弹丸从发射到飞至最高点期间偏离距离.

例如: 取简单平均、或使用$\frac{T}{2}$时的$\mathrm{d}V$作为平均值、或分段计算$0\sim\frac{T}{2}$, $\frac{T}{2}\sim T$的距离等, 结果为某常数$\times\omega_0\frac{V_0^3}{g^2}$

若使用积分计算, 可得出准确结果$\frac{4}{3}\omega_0\frac{V_0^3}{g^2}$

(使用平均方法计算, 推导和计算过程正确, 此步骤给满分; 若使用积分计算, 须得出准确结果, 此步骤给满分)

例8 (CNAO 2018高) **霍金辐射**

解: **(1)** 黑洞的史瓦西半径为: $r_{\mathrm{S}}=\frac{2GM}{c^2}$, 从牛顿力学出发进行求解也可以得出一样的结果, 在这里不进行赘述.

(2) 光子的能量可以表示为: $E=\frac{hc}{\lambda}\sim\frac{hc}{r_{\mathrm{S}}}=\frac{hc^3}{2GM}$, 故光子的温度为:

$$T=\frac{E}{k_{\mathrm{B}}}=\frac{hc^3}{2k_{\mathrm{B}}GM}.$$

(3) 黑洞的表面积为 : $A=4\pi r_{\mathrm{S}}^2=\frac{16\pi G^2M^2}{c^4}$.

黑洞的辐射方式可以看作黑体辐射, 故黑洞辐射功率为:

$$P=A\cdot\sigma T^4=\frac{\pi\sigma h^4c^8}{k_{\mathrm{B}}^4G^2}\cdot\frac{1}{M^2}.$$

(4) 根据质能方程, 黑洞的总能量为: $E(t)=M(t)c^2\equiv M_0c^2\cdot\alpha(t)$, 其中$\alpha(t)=M(t)/M_0$为无量纲量. 单位时间内, 黑洞质量的损失率:

$$\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}\frac{1}{c^2}=-P\frac{1}{c^2}=-\frac{\pi\sigma h^4c^6}{k_{\mathrm{B}}^4G^2}\cdot\frac{1}{M^2}.$$

故黑洞的寿命为: $\tau=\int\mathrm{d}t=-\frac{k_{\mathrm{B}}^4G^2}{\pi\sigma h^4c^6}M_0^3\int\alpha(t)^2\mathrm{d}\alpha\propto M_0^3$.

即黑洞的寿命τ和黑洞初始质量M_0的三次方成正比.

例9 (CNAO 2020高) **主序星占比**
解: (官方答案即将公布)

例10(CNAO 2020低&高) **脉冲星**
解: (官方答案即将公布)

例11(CNAO 2019低&高) **火星天文馆**
解: **(1)** 考虑地球上观察火星天文馆的角大小:

利用望远镜分辨角$\delta=1.22\frac{\lambda}{D}$及$\theta=\frac{R_{\text{天象厅}}}{d_{\mathrm{ME}}}$等公式进行计算, 并讨论判断.

其中, λ是入射光波长, D是望远镜口径, $R_{\text{天象厅}}$是天象厅半径(可取11.5米), d_{ME}是地球和火星之间的距离.

(2) 考虑地球上观察火星天文馆的亮度(或亮度变化):

利用目视望远镜极限星等$m_{\mathrm{b}}=2.1+5\lg D$及$m=m_{\mathrm{sun}}-2.5\lg(F/F_{\mathrm{sun}})$等公式进行计算, 并讨论判断.

其中, m是火星天文馆的视星等, F是火星天文馆反射出的光照射到地球上的亮度, $m_{\rm sun}$是太阳视星等.

(3) 其他(需根据具体计算展开合理讨论):

如, 可以通过探测器作为中继观测点;可以利用莫尔斯码传递信息;亮度变化导致星等变化的可探测性等.

(本题为开放性试题, 只要阐述的理由和给出的计算过程合理、自洽, 即可得分. 讨论的情况越全面, 得到的分数将越高. 只回答"可以"或者"不可以"不得分)

练习

1. (CNAO 2008低) **肉眼和望远镜**

解: 根据望远镜分辨率公式: 分辨角$\theta = 1.22\ \lambda/D$, 可知分辨率与探测器口径成正比, 因此, 此倍率为100 mm/6 mm = 16.67倍. 又因为极限星等$m_1 = 6.9 + 5\lg D$, D的单位为厘米, 所以两者极限星等之差为: $M_1 - M_2 = 6.9 + 5\lg D_1 - (6.9 + 5\lg D_2) = 5\lg(D_1/D_2) = 6.1092$因此, 观测到恒星视亮度之比: $2.512^{6.1092} = 278$倍.

2. (CNAO 2011选拔赛低&高) **分子云**

解: 首先考虑分子热运动动速小于度必须逃逸速度,

$$\frac{3kT}{m} < \frac{2GM}{R} = \frac{8\pi G\rho R^2}{3},$$

可以推得

$$R > \sqrt{\frac{9kT}{8\pi G\rho m}},$$

代入题干所给数值, 得到R约为200000 km.

但这样得出的半径其对应的氢云的质量约为4个地球质量, 这种情况是不可能形成恒星的, 只能形成行星.

同样如果考虑金斯不稳定性

$$\frac{R}{v} > \frac{1}{\sqrt{G\rho}}$$

其中v是尺度为R的气体球的声速. 这样得到氢云的最小半径, 其质量仍不足以产生恒星. 因此正确的想法是利用最小恒星质量作为判据:

$$M_* = 0.08M_{\rm sun}$$

$$\frac{4\pi R_{\rm c}^3\rho_{\rm a}}{3} = M_*$$

$$\rho_{\rm a} = 0.5\times1.23\ {\rm kg/m^3}$$

最后得到

$$R_{\rm c} \geq 4\times10^6\ {\rm km}$$

3. (CNAO 2012选拔赛低) **星等**

解: 亮度与距离成反比. 设天狼星现在到地球距离为$D_1 = 2.7$ pc, 经过T年后减小到D_2. ${D_1}^2/{D_2}^2 = 2$, $D_1 - D_2 = T \times 80000$ km/yr .

pc和km的换算关系是1 pc = 206265 au = 3.09×10^{13} km.

由此解得$D_2 = 5.9 \times 10^{13}$ km, $T = 3.05 \times 10^8$ yr.

4. (CNAO 2013选拔赛高) **分子云**

解: **(1)** 为了回答这道题目, 首先我们应当知道恒星的质量下限: $M_{\rm min} = 0.08M_\odot$.

因而我们可以列方程求出分子云半径: $\dfrac{4}{3}\pi R^3 \cdot \rho = M_{\min}$

解得: $R = \sqrt[3]{\dfrac{3 \times 0.08 M_\odot}{4\pi\rho}}$

选手如果不知道恒星质量下限, 也可以跳过此小问继续做答, 第一小问和二三并无关联.

(2) 反射光强: $L_{\rm r} = \dfrac{L}{4\pi D^2} \cdot \pi r^2 \cdot \alpha = \dfrac{\alpha r^2}{4D^2} L$.

(3) 热平衡状态下, 由斯特藩-玻尔兹曼定律:(单面受照射, 左边为吸收, 右边辐射)

$$\frac{L}{4\pi D^2}(1-\alpha) \cdot \pi r^2 = \sigma t^4 \cdot 2\pi r^2$$

从而解得 $t = \sqrt[4]{\dfrac{(1-\alpha)Lr^2}{8\pi\sigma D^2}}$

5. (IOAA 2016) **泰坦星上的气体**

解: 依题意, 气体为理想气体, 满足 $\dfrac{3}{2}k_{\rm B}T_{\rm T} \approx \dfrac{1}{2}m_{\rm g}v_{\rm rms}^2 = \dfrac{1}{2}\dfrac{M_{\rm g}}{N_{\rm A}}v_{\rm rms}^2$, 可得 $v_{\rm rms} = \sqrt{\dfrac{3k_{\rm B}N_{\rm A}T_{\rm T}}{M_{\rm g}}}$. 由已知,“气体粒子的热速度的均方根超过了它的逃逸速度的1/6, 那么绝大部分这种气体就会从行星中逃逸出去”, 可得 $v_{\rm rms} < \dfrac{v_{\rm esc}}{6} = \dfrac{1}{6}\sqrt{\dfrac{2GM_{\rm T}}{R_{\rm T}}}$. 代入第一步的结果后可得 $M_{\rm g} > \dfrac{54k_{\rm B}N_{\rm A}T_{\rm T}R_{\rm T}}{GM_{\rm T}} =$ 13.2 g, 所以最小原子质量数 $A_{\min}$ 是13.2.

6. (IOAA 2016) **造父变星脉动**

解: **(1)** 根据星等的定义式, $m_1 - m_2 = -2.5\lg\dfrac{F_1}{F_2}$, 所以 $\dfrac{F_1}{F_2} = 10^{-0.4(m_1-m_2)} = 1.77$.

根据斯特藩-玻尔兹曼公式 $L = 4\pi R^2\sigma T^4$, 可得 $\dfrac{R_1}{R_2} = \sqrt{\dfrac{F_1}{F_2}} \times \left(\dfrac{T_2}{T_1}\right)^2$. 根据维恩定律 $\dfrac{T_2}{T_1} = \dfrac{\lambda_1}{\lambda_2}$, $\dfrac{R_1}{R_2} = \sqrt{\dfrac{F_1}{F_2}} \times \left(\dfrac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^2 = 0.890$.

(2) 依题意, $R_2 - R_1 = v \times \dfrac{P}{2} = 12.8 \times 10^3 \times \dfrac{9.84 \times 86400}{2}$ m, 所以 $R_1 = 4.41 \times 10^{10}$ m, $R_2 = 4.95 \times 10^{10}$ m.

(3) 将天体的流量值与太阳的作比较, 有 $m_2 - m_\odot = -2.5\lg\dfrac{F_2}{F_\odot}$. $F_2 = F_\odot \cdot 10^{-0.4(m_2-m_\odot)} = \dfrac{L_\odot}{4\pi a_\oplus^2} 10^{-0.4(m_2-m_\odot)} = 6.51 \times 10^{-10}$ W m^{-2}, 其中 $a_\oplus$ 表示日地平均距离.

(4) 根据维恩定律, $T_2 = \dfrac{2.898 \times 10^{-3}\ \text{m K}}{\lambda_2}$.

天体的距离 $D_{\rm star} = \sqrt{\dfrac{L_2}{4\pi F_2}} = \sqrt{\dfrac{R_2^2\sigma T_2^4}{F_2}} = 298$ pc.

7. (自编) **天和升空**

解: **(1)** 依题意可知, 天和轨道的半长轴为

$$a = \frac{h_{\rm p} + h_{\rm a} + 2R_\oplus}{2} = 6739.5\ \text{km}.$$

由天体力学的知识我们知道, 围绕地球做半长轴为 a 的椭圆运动的物体 m 的总机械能为

$$E=-G\frac{M_{\oplus}m}{2a}$$

于是在近日点处，由$E=E_k+E_p$，得到

$$-G\frac{M_{\oplus}m}{2a}=\frac{1}{2}mv_p^2-G\frac{M_{\oplus}m}{R_{\oplus}+h_p}$$

解得$v_p=\sqrt{\frac{2GM_{\oplus}}{R_{\oplus}+h_p}-\frac{GM_{\oplus}}{a}}=7724.81\ \mathrm{m/s}$.

记核心舱的质量为m_1，火箭含燃料质量为m_2，燃料质量为m_0. 则燃料耗尽后，核心舱与空火箭的动能为

$$E_k=\frac{1}{2}(m_1+m_2-m_0)v_p^2=2.96\times10^{12}\ \mathrm{J}$$

而如果仅考虑燃料给予的冲量，加速后的动量应为

$$p_0=m_0\cdot I_{sp}=1.5\times10^9\ \mathrm{kg\cdot m/s}.$$

故速度为$v_0=\frac{p_0}{m_1+m_2-m_0}=1.51\times10^4\ \mathrm{m/s}$. 因此初始动能为

$$E_{k0}=\frac{1}{2}(m_1+m_2-m_0)v_0^2=1.13\times10^{13}\ \mathrm{J}$$

因此动能损失率为$1-\frac{E_k}{E_{k0}}=73.8\%$.

(2) 要求轨道的周期，可以利用开普勒第三定律$\frac{T^2}{a^3}=\frac{4\pi^2}{GM_{\oplus}}$. 解得

$$T=2\pi\sqrt{\frac{a^3}{GM_{\oplus}}}=5495.19\ \mathrm{s}=1.53\ \mathrm{h}.$$

(3) 画图解答. 首先，$i>\varphi$，故天和号必有可能过天顶，$a_{max}=90°$.

再考虑最低点. 由于$h_p\ll R_{\oplus}$，显然在上中天时，其地平高度有可能小于零.

由余弦定理，观察者与天和号的距离为

$$d=\sqrt{R_{\oplus}^2+(R_{\oplus}+h_p)^2-2R_{\oplus}(R_{\oplus}+h_p)\cos(\varphi+i)}=6990.6\ \mathrm{km}$$

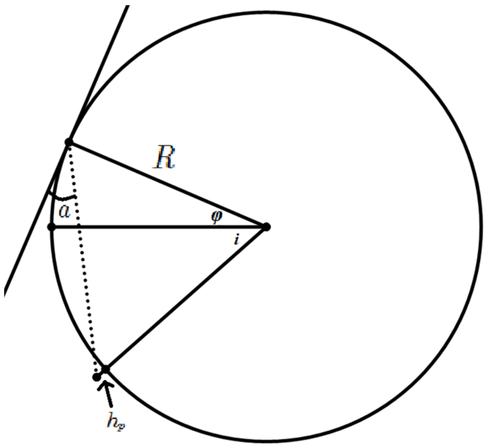
故又由余弦定理，

$$\cos(90°-a)=\frac{R_{\oplus}^2+d^2-(R_{\oplus}+h_p)^2}{2\cdot R_{\oplus}\cdot d}=0.497$$

得到

$$a\approx29.8°$$

由于在地下，故$a_{min}=-29.8°$.



(4) 天和号的侧面积为

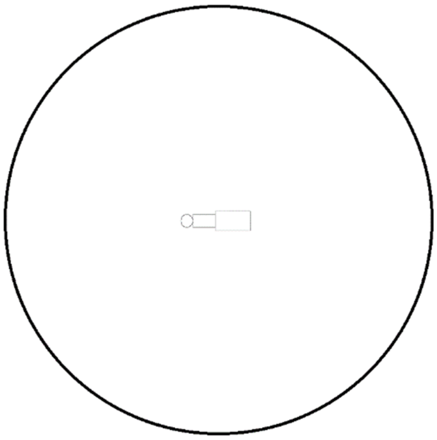
$$S=1.4^2\pi+2.8\times5.4+4.2\times8.3=56.14\ \mathrm{m}^2$$

因此列出普森公式

$$m-m_{\odot}=-2.5\lg\left(\frac{p\cdot\frac{L_{\odot}}{4\pi d_{\oplus}^2}\cdot S\cdot\frac{1}{2\pi h_p^2}\cdot e^{-\tau}}{\frac{L_{\odot}}{4\pi d_{\oplus}^2}}\right)=27.65$$

故星等为$m=-26.7+27.65=0.95\approx1$.

(5) i. 像的亮度与其相对口径$\dfrac{D}{f}$有关. $\dfrac{80}{1500}=0.0533$, $\dfrac{70}{1350}=0.0519$. 因此社长搬出的这一台看到的更亮. 当然, 前提是依然能完整看到天和核心舱.



ii. 角放大率为$\omega=\dfrac{f_o}{f_e}=375$. 放大后其长度的视大小为$\dfrac{16.5\ \text{m}}{352\ \text{km}}\times\dfrac{180}{\pi}\times375=1^\circ$. 因此, 在极端理想情况下, 其长度应占到目镜视场的六分之一. 宽度按比例即可.

例11(CNAO 2013选拔赛高) **艾森彗星**

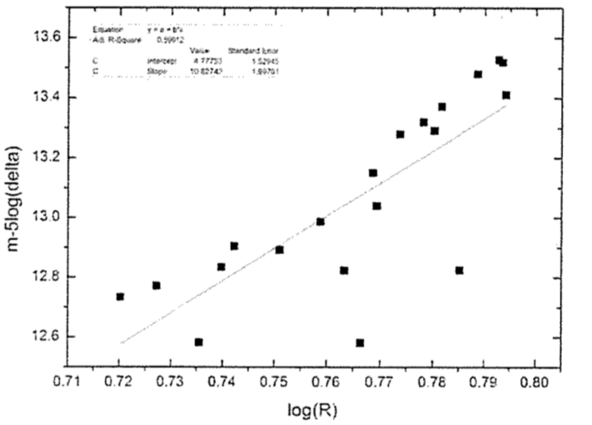
(1) 彗星在离太阳R处接收到的太阳辐射流量F_R反比于R^n, 距离彗星为A的观测者接收到的彗星辐射流量F正比于F_R/Δ^2, 即: $F_R\propto R^{-n}\Delta^{-2}$.

视星等定义为$m\sim-2.5\lg\ F$, 当$R=\Delta=1$时, 观测者接收到的彗星辐射流量记为F, 根据彗星绝对星等的定义, 显然$H\sim-2.5\lg\ F_0$. 因此有:

$$m-H=-2.5\lg\frac{F}{F_0}=-2.5\lg R^{-n}\cdot\Delta^{-2}=5\lg\Delta+2.5n\cdot\lg R$$

即: $H=m-5\lg\ \Delta-2.5n\cdot\lg\ R$.

(2) 从上式得知, $m-5\lg\ \Delta=H+2.5n\cdot\lg\ R$, 以$\lg\ R$为横坐标、$m-5\lg\ \Delta$为纵坐标, 代入表中所给数据作图如下. 此图的斜率为$2.5n$、截距即为H. 对此图做线性拟合, 可求出$n\approx4.3$, $H\approx4.8$.



(3) 将H、n、Δ、R的数据代入(1)式, 可求出: $m=5\lg\ \Delta+H+2.5n\cdot\lg\ R\approx-6.5^{\text{m}}$.

注: 艾森彗星的近日距为0.01 au, 此时它距离地球0.99 au, 可以算出它在近日点时的亮度可能高达−16等左右! 比满月还亮. 但这时它完全淹没在阳光中, 我们无法看到. 在后来的观测中, 艾森彗星在通过近日点前解体, 远没有达到如此之高的亮度.

例12(IOAA 2017节选) **测量大麦云的距离**

对造父变星, 周光关系为

$\lg L=\beta\lg P+C$

回忆起$F=\dfrac{L}{4\pi d^2}$, 因此$\lg\ L$可以用绝对星等M_x表示

$\lg L=\lg F+2\lg d+\lg4\pi$

以及

$$-\frac{m}{2.5} = \lg F - \lg F_0$$

两式相减，我们得到

$$2.5\lg L = -m + 5\lg d + C^*$$

由绝对星等的定义，

$$M = m + 5 - 5\lg d_{\rm pc}$$

我们因此得到了L和M的关系，

$$2.5\lg L = -M + C''$$

代入周光关系，我们得到$M = \beta' \lg P + C'$，或者意识到$\lg L \propto M$，其中$\beta' = -2.5\beta$.

通过表中V和K波段的数据以及视差计算绝对星等M_x和它的误差.

计算距离及其误差:

$$d_{\rm pc}(\text{parsec}) \approx \frac{1\ \text{AU}}{\theta_{\rm parallax}(\text{arcsec})},\ \Delta d_{\rm pc} = \frac{\Delta\theta}{\theta} \times d_{\rm pc}$$

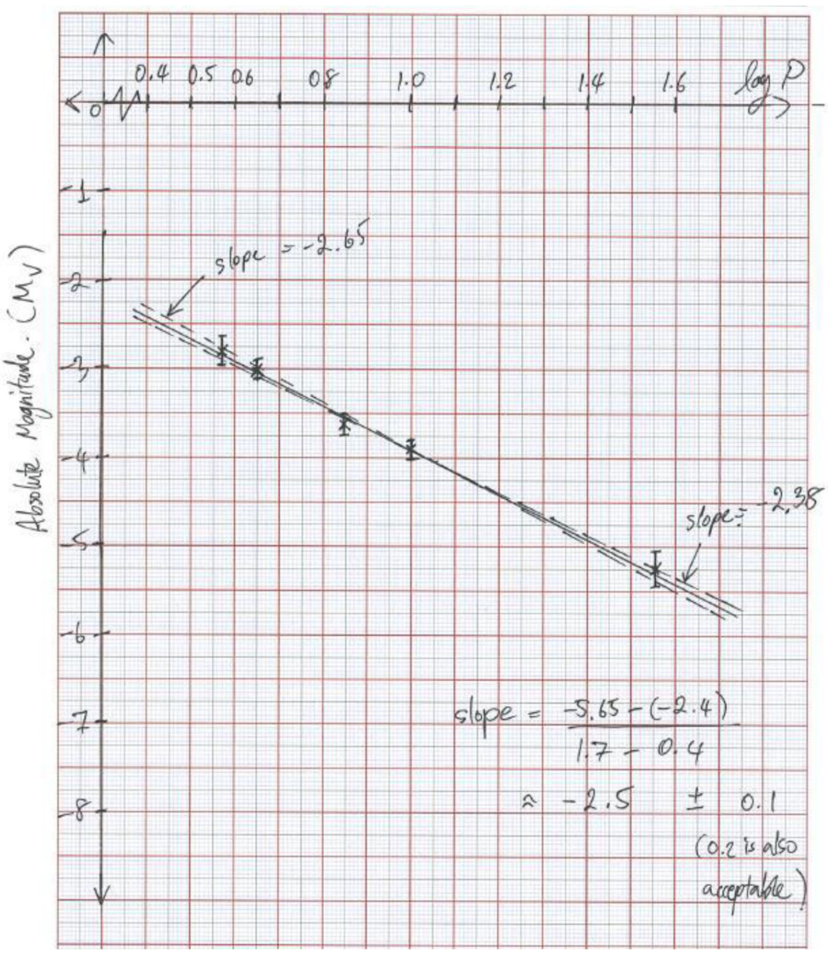
然后计算绝对星等及其误差:

$$M_x = m_x - A_x + 5 - 5\lg d_{\rm pc}$$

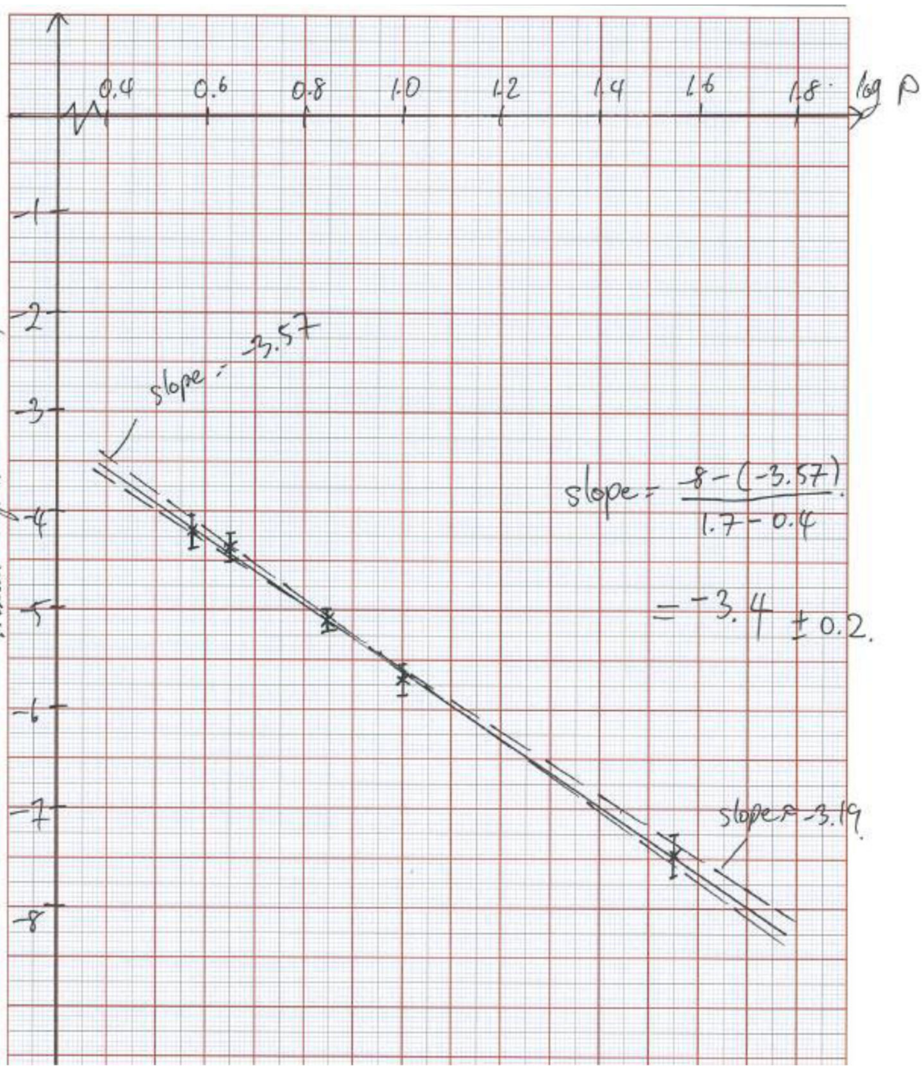
$$\Delta M_x = \frac{5}{d_{\rm pc}\ln 10} \times \Delta d_{\rm pc}$$

	d_{pc}	Δd_{pc}	logP	M_V	ΔM_V	M_K	ΔM_K
RT Aur	416.6	32.	0.572	-2.83	0.17	-4.19	0.17
FF Aql	355.8	22.	0.650	-3.02	0.13	-4.37	0.13
X Sgr	333.3	20.	0.846	-3.63	0.13	-5.12	0.13
ζ Gem	359.7	23.	1.007	-3.92	0.14	-5.69	0.14
l Car	497.5	49.	1.551	-5.27	0.21	-7.47	0.21

V数据



K数据



例13(CNAO 2012选拔赛低&高) **银河系常数**

本题的情况很有意思. 由于太阳S和天体M距银心距离相等, 所以它们的轨道速度也应该一样, 这样它们和银心构成的三角形就只有旋转而没有变形, 即r不随时间改变. 这意味着天体M相对太阳S的速度只有切向分量. 而且这个切向的角速度对任何天体M都是相同的.

(1) 比如说, r不宜太小, 即L不宜过于接近90度. 因为天体除了绕银心运动, 还有随机的运动速度. 随机运动的线速度各处都是相近的, 而从太阳观测时各处绕银心的角速度是相等的. 因此应该避免r过小.

r也不宜太大, 因为同样的天体, 越远则越暗, 越不容易准确地测出其位置.

L不宜接近180度, 即不宜选择银心方向的天体. 因为银心方向消光严重, 很难准确地测量出天体的r.

(2) 已经论述过这些天体相对太阳只有切向速度且同角速度, 并且这个角速度就是太阳绕银心的角速度. 所以角速度$\omega = v/r = V_0/R_0$. 再利用L和r、R之间的几何关系建立等式, $r/2 = R_0 \cos L$.

解得, $R_0 = r/2 \cos L$, $V_0 = v_1 R_0/r = v_1/2 \cos L$.

(3) 利用(2)中的结论, 分别算出$R_0 = 8.39$ kpc, 7.84 kpc, 16.89 kpc, 7.82 kpc. 第三个数据显然有问题, 将其他三个平均, 得到结果8.0 kpc.