国决与国家集训队选拔

赛前の杂谈

郭雨泽

武汉大学 物理科学与技术学院

2023 年 5 月 7 日

目录

1 查缺补漏

From: 2022 年寒假集训

- 基础: 高中数学 (基本初等函数, 向量, 圆锥曲线)
- 高年组: 应当初步掌握单变量微积分 (2018&2019 国决, 2019&2020 选拔赛均已出现求导, 积分或解微分方程)

向量

- 坐标表示: $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$
- 加减法 (三角形法则): $\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}=(a_x\pm b_x,a_y\pm b_y,a_z\pm b_z)$
- 数量积: $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\sum_i a_ib_i=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$
- 向量积: $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\hat{\boldsymbol{\imath}} & \hat{\boldsymbol{\jmath}} & \hat{\boldsymbol{k}}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}$, 大小 $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta$

圆锥曲线

1. 椭圆：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$
2. 双曲线：$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$
3. 抛物线：$y^2=2px$

或者用极坐标形式：

$$r=\frac{p}{1-e\cos\theta}$$

其中：

1. $0<e<1$：椭圆；
2. $e=1$：抛物线；
3. $e>1$：双曲线。

单变量微积分:

1 等价无穷小 $(x \to 0)$:

$$\sin x \sim x, \quad \cos x \sim 1 - \frac{1}{2}x^2, \quad \tan x \sim x, \quad \ln(1+x) \sim x, \quad \mathrm{e}^x \sim 1 + x$$

2 常见导数:

$$(x^n)' = nx^{n-1}, \quad (a^x)' = a^x \ln a, \quad (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$$

$$(\sin x)' = \cos x, \quad (\cos x)' = -\sin x, \quad (\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

❸ 常见不定积分(求导的逆运算):

$$\int x^n \,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C, \quad \int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln x + C$$

$$\int \sin x \,\mathrm{d}x = -\cos x + C, \quad \int \cos x \,\mathrm{d}x = \sin x + C$$

定理 1.1: Newton-Leibniz 公式

$$\int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x = f(b) - f(a)$$

From: 2022 年寒假集训:
高中物理力学部分 (开普勒定律, 牛顿运动定律, 万有引力定律, 能量, 动量),
以及角动量, 引力势能, 基本量子理论, 热学基础

开普勒定律:

1. 行星围绕太阳运行的轨道是椭圆，太阳在其中一个焦点上;
2. 掠面速度 $\dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = \mathrm{Const.}$;
3. 对同一恒星，$\dfrac{a^3}{T^2} = \mathrm{Const.}$

牛顿定律:

1. $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$;
2. $\boldsymbol{F} = -G\dfrac{m_1 m_2}{r^2}\hat{\boldsymbol{r}}$
3. 若所选的参考系为非惯性系，则运用牛顿定律时要加上惯性力（虚拟的力）

动量:

1. 定义: $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$;
2. 动量定理: $\mathrm{d}\boldsymbol{p} = \boldsymbol{F}\,\mathrm{d}t$;
3. 动量守恒: 若 $\sum \boldsymbol{F}_{\mathrm{ex}} = \boldsymbol{0}$, 则 $\mathrm{d}\boldsymbol{p} = \boldsymbol{0}$.

能量:

1. 动能: $E_{\mathrm{k}} = \dfrac{1}{2}mv^2$;
2. 引力势能 (以无穷远为零点): $E_{\mathrm{p}} = -G\dfrac{m_1 m_2}{r}$;

角动量 (注意轴):

1. 力矩定义: $\boldsymbol{M}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}$;
2. 角动量定义: $\boldsymbol{L}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}=\boldsymbol{r}\times(m\boldsymbol{v})$;
3. 角动量定理: $\mathrm{d}\boldsymbol{L}=\boldsymbol{M}\,\mathrm{d}t$
4. 角动量守恒: 若对轴的合外力矩 $\sum\boldsymbol{M}_{\mathrm{ex}}=\mathbf{0}$, 则 $\mathrm{d}\boldsymbol{L}=\mathbf{0}$

* 刚体力学:

1. 转动惯量 I: 在转动中相当于平动下的质量; 与物质质量, 转动轴有关.
   常见物体转动惯量:

$$\text{均匀球体绕中心轴: } I=\frac{2}{5}mR^2,\quad \text{均匀球面绕中心轴: } I=\frac{2}{3}mR^2$$

2. 定轴纯转动关系:

$$\boldsymbol{M}=I\boldsymbol{\beta},\quad \boldsymbol{L}=I\boldsymbol{\omega},\quad E_{\mathrm{k}}=\frac{1}{2}I\omega^2$$

基本量子理论:

1. 光子能量: $\varepsilon = h\nu$
2. Wien 位移定律: $\lambda_{\max} = \dfrac{b}{T}$, 其中 Wien 常数 $b = 2.90 \times 10^{-3}\,\mathrm{m \cdot K}$
3. Stefan-Boltzmann 定律: $F = \sigma T^4$

热学基础:

1. 理想气体状态方程: $pV = \nu RT$
2. 理想气体压强: $p = nk_{\mathrm{B}}T$
3. 理想气体分子平均平动动能: $\bar{\varepsilon} = \dfrac{3}{2}k_{\mathrm{B}}T$
4. 理想气体平均速率: $\bar{v} = \sqrt{\dfrac{8k_{\mathrm{B}}T}{\pi m}} = \sqrt{\dfrac{8RT}{\pi\mu}}$
5. 理想气体方均根速率: $v_{\mathrm{rms}} = \sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\dfrac{3k_{\mathrm{B}}T}{m}} = \sqrt{\dfrac{3RT}{\mu}}$

❷ 天体测量

天体测量学的题目一般设计几种具体问题:

1. 时间问题
2. 球面问题
3. 坐标问题
4. ……

注意理解各种时间之间的关系 (真、平太阳时, 恒星时, 当地时……)
注意特殊时间与春分点/其它天体的关系

方法:

- 画图 (截面图/球面图)
- 找到三角形 (平面/球面)
- 具体求角方法 (球面三角/矢量法)

$$\cos\theta = \frac{\boldsymbol{r}_1 \cdot \boldsymbol{r}_2}{|\boldsymbol{r}_1||\boldsymbol{r}_2|}$$

3 天体力学

抓紧以下要素:

- 研究对象
- 守恒量

惯性力

- 选取非惯性系为参考系时，为了使牛顿第二定律依然成立而人为添加的虚拟力.
- 平移惯性力
  若惯性系平动加速度为 $\boldsymbol{a}'$，则质量为 m 的物体需加上惯性力 $\boldsymbol{F}' = -m\boldsymbol{a}'$
- * 转动惯性力
  1. 惯性离心力：$\boldsymbol{F}_\mathrm{c} = m\omega^2\boldsymbol{r}'$
  2. 科里奥利力：$\boldsymbol{F}_\mathrm{Cor} = 2m\boldsymbol{v}' \times \boldsymbol{\omega}$
  3. 切向惯性力：$\boldsymbol{F}_\mathrm{t} = m\boldsymbol{r}' \times \boldsymbol{\beta}$

④ 天体物理 (和其它)

4. 1 星等与测光
4. 2 简聊热学 (额外)
4. 3 位力定理

概念辨析

- 能流密度 (流量, 亮度)F: 通常指单位面积上的辐射功率 (所有波段辐射的总和), 由 Stefan-Boltzmann 定律给出;
- 光度 L: 某个天体的总辐射功率; 一般情况下, $L = {}_S F\,\mathrm{d}S$
  在各向同性情况下 (比如半径为 R 的恒星), $L = 4\pi R^2 F = 4\pi R^2 \sigma T_{\mathrm{e}}^4$
- 视星等 (可见光)m_{V}: $m_1 - m_2 = -2.5 \lg \dfrac{F_1}{F_2}$
- 热星等 (全波段)m_{bol}: 可通过热改正 (BC) 得到: $m_{\mathrm{bol}} = m_{\mathrm{V}} + \mathrm{BC}$(有时为减)
- 色指数 $U - B$ 或 $B - V$: 星等之差, 对 A0 型恒星 (如织女) 为 0.
  温度越高, 色指数越大; 温度越低, 色指数越小.

概念辨析

- 绝对星等 M: 将恒星放到距离 10 pc 处的星等. $m-M$ 称为距离模数 μ:

$$\mu = m - M = 5\lg\frac{r}{10\,\mathrm{pc}}$$

- 光深 τ: 若原始光度为 L_0, 经过介质消光后光度为 L, 则 $L = L_0\mathrm{e}^{-\tau}$
- 消光 A: 由于介质消光引起的星等增大. 可以证明, $A = 2.5\tau\lg\mathrm{e}$

$$m - M = 5\lg\frac{r}{10\,\mathrm{pc}} + A$$

- 色余 E_{B-V}: 由于星际介质对蓝光吸收得比红光更多, 因此色指数增大, 差值即为 $E_{B-V} = A_B - A_V$.

  观测表明, $R = \dfrac{A_V}{E_{B-V}} \approx 3.0$ 为常数.

- 光子的平均能量

$$\bar{\varepsilon} = 3k_{\mathrm{B}}T_{\mathrm{CMB}}$$

- 热容 $C = \dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}T}$， 比热容 $c = \dfrac{C}{m} = \dfrac{\mathrm{d}Q}{m\,\mathrm{d}T}$
- 热力学第一定律

$$\mathrm{d}U = \text{đ}Q + \text{đ}W$$

在引力束缚系统中，有

$$2\langle K\rangle + \langle U\rangle = 0$$

对球形系统，有

$$M\langle v^2\rangle - \frac{3}{5}\frac{GM^2}{R} = 0$$

可解出

$$M \sim \frac{5}{3}\frac{R\langle v^2\rangle}{G}$$

Thanks!