

2022年寒假天文集训

解答题讲义

HFAA13.0 郭雨泽 2022.1.21

说明：这里的题目我们会在24日上午的后半段进行讲解和拓展。这些题目有些难度，就算一道都做不出也很正常。但请务必自行先思考并尝试，讲解的时候才会有更大的启发。部分题目是在原题的基础上进行改编。

热身

1. 南→东→北

假设地球是一个半径 $R = 6378$ km的刚性正球体，表面为平滑的刚体。在地球表面存在一些这样的点，我们从那里出发先向南6378千米，再向东6378千米，再向北6378千米，就会回到出发的位置。找到这些点和路径。计算这些转向点的地理坐标，并画出路径。

为了简单起见，我们用 0° 到 $+360^\circ$ 来标定从格林威治向东的经度，用 0° 到 $+90^\circ$ 来标定赤道向北的地理纬度，用 0° 到 -90° 来标定赤道向南的地理纬度。由于地球是旋转对称的，从不同的子午圈出发的情况不会被认为是有不同的解决方案。

现在不要求算出具体坐标，你能画出多少种情况？

天体测量

2. 流浪地球

今年大年初一上映的电影《流浪地球》可谓开启了中国现代科幻电影元年，获得了口碑和票房的双丰收。剧中，重启行星发动机的剧情也让人津津乐道。假设某救援队从位于中国乌鲁木齐的基地出发，开飞机运送火石救援位于印尼苏拉威西的转向发动机，基地位置为： $43^\circ 51' 1.95''\text{N}$, $87^\circ 34' 2.54''\text{E}$ ；转向发动机位置为： $0^\circ 23' 32.64''\text{S}$, $119^\circ 55' 51.92''\text{E}$ 。因为任务紧急，出动救援队过多，基地燃油储备不足，这架飞机必须在途中的补给站进行燃油补给才能飞到印尼。已知在飞行路线附近有两个补给站，一个是重庆补给站，位置为： $29^\circ 33' 31.10''\text{N}$, $106^\circ 34' 10.99''\text{E}$ ；另一个是贵阳补给站，位置为： $26^\circ 34' 57.54''\text{N}$, $106^\circ 42' 14.84''\text{E}$ ，试问应该选择哪个补给站，才能尽可能少绕路？地球可视为球形，请给出你的计算过程。

已知：

$$\sin B \sin a = \sin A \sin b,$$

$$\cos B \sin a = -\cos A \sin b \cos c + \cos b \sin c,$$

$$\cos a = \cos A \sin b \sin c + \cos b \cos c.$$

尝试用多种方法做出来。

天体力学

3. 双星

天文学家将包围在恒星周围的特定空间称为洛希瓣，在这个范围内的物质会受到中心天体的引力约束而在轨道上作环绕运动。当恒星吸附的物质膨胀至洛希瓣的范围之外，它们将摆脱恒星引力的束缚，如果这种情况发生在双星系统中，逃逸的物质将经由拉格朗日点落入另一颗子星的引力范围内。某双星系统中两颗恒星围绕它们的质心在同一直线上旋转且正在发生物质交流，已知某时刻两颗恒星质量分别为 m_1 和 m_2 ($m_1 > m_2$)，两个子星的距离为 r ，引力常量为 G ，不考虑系统与外部的物质交流。

(1) 求该时刻系统轨道周期 T 。

(2) 如果一段时间后，发现轨道周期 T 变短了(ΔT 远小于 T)，试通过计算确定两颗天体是相互靠近还是远离，物质转移的方向是从 m_1 到 m_2 还是从 m_2 到 m_1 。

提示：

$$(1 + x)(1 + y) \approx 1 + x + y, \text{ 当 } x \ll 1, y \ll 1 \text{ 时}.$$

$$(1 + x)^n \approx 1 + nx, \text{ 当 } x \ll 1 \text{ 时}.$$

4. “新视野”号探测器

2015年7月，美国宇航局的“新视野”号探测器将会飞掠冥王星。“新视野”号从地球上发射，最后关闭动力引擎时相对于地球的速度是16.26千米/秒，因此离开地球后，它的绕日运行轨道近似为抛物线，太阳位于焦点处。为增加速度，它在飞往冥王星的过程中曾利用了木星的引力弹弓效应进行加速。请画出它的绕日轨道示意图，并据此估算它从地球飞行到木星所用的时间。

提示：

(1) 假设地球和木星公转轨道为圆形；

(2) 阿基米德曾经发现，抛物线 $y = x^2$ 在区间 $[a, b]$ 内的曲线下的面积，也就是直角坐标系下 $y = x^2$ 、 $y = 0$ 、 $x = a$ 、 $x = b$ 四条曲线围成的面积，等于 $(b^3 - a^3)/3$ 。

※一颗主序星的半径为 $R = 4R_{\odot}$ ，质量为 $M = 6M_{\odot}$ ，平均磁场强度为 1×10^{-4} T (特斯拉)。请计算当这颗主序星演化为半径为20 km的中子星时，其磁场的平均强度。

5. 太阳和月球的引力作用导致了海潮的涨落. 考虑在地球赤道上的两点A和B, 而且A点在海平面. A点和B点间的经度差为 φ . 如果月球在B点的天顶, 请推导在A点的由于月球引力所导致的海水的水平加速度. (请用 φ 、地球的半径 R 和地月距离来表示)

天体物理

6. 新彗星颗粒的命运

今年新彗星(Neowise)吸引了无数眼球. 一般彗星会释放出不同尺寸的颗粒, 假设一个脱离了彗核的彗星颗粒(其尺寸为 D)在太阳系内只受到太阳的万有引力和太阳辐射压力的作用, 则存在一个彗星颗粒临界尺寸 D_0 , 使得该颗粒受到的引力和辐射压力平衡, 请估算 D_0 的值, 并说明尺寸大于 D_0 和小于 D_0 的Neowise彗星颗粒的命运将分别是什么?

7. 假星

小明决定拍摄一张带地景的猎户东升星野照片, 使用镜头的焦距为24 mm, 参数为ISO 3200, f/2.8, 曝光时间20秒. 他的朋友小刚想和他开个玩笑, 于是带了一个闪光灯, 来到小明拍摄方向上距离小明2千米远的地方. 在小明拍摄时, 小刚用闪光灯闪了一下光, 于是在小明的照片上制造了一颗假星. 已知这个闪光灯的闪光持续时间为1/250秒, 其闪光亮度如下: 使用它对于距离闪光灯和相机都是1.5米的物体拍照时, 摄影条件(包括感光度、光圈等)与在日光下使用大约1/2000秒的曝光时间对同一物体拍照是一样的.

请估算在小明照片上假星的星等.

8. 霍金辐射

在本题中，你会一步一步地推导黑洞的霍金辐射表达式。在这里，黑洞的模型为没有自旋、不带电荷的史瓦西黑洞；由于严格的计算需要用到量子场论的知识，在一些细节上你只需要正确估计量级。

- (1) 请写出质量为 M 的史瓦西黑洞的视界面半径 r_s ；如果你不会，你可以从牛顿力学出发，计算质点 M 在逃逸速度为光速 c 时对应的半径。
- (2) 考虑量子效应后，理论上光子可以从这一黑洞中逃逸出来，我们认为这时光子的波长应与黑洞视界面的典型尺度相当。光子的温度可以表示为 $T = E/k_B$ ，其中 k_B 为玻尔兹曼常数， E 为光子的能量。则光子的温度是多少？
- (3) 假设黑洞以上方式辐射光子，则黑洞辐射的功率是多少？
- (4) 黑洞的寿命 τ 和黑洞初始质量 M_0 的几次方成正比？

9. 计算奥陌陌进入太阳系引力范围前，在星际空间内穿行的速度；假设太阳系附近空间中恒星的平均间距为 2 pc，每颗恒星的引力范围为 10 AU，则在奥陌陌探访太阳系之前，它大约在星际空间内穿行了多长时间？这一时间长度和宇宙年龄的比值是多少？

单看这个题干当然是做不出来的，现在请问：本题的情形与物理学中的哪个模型可以类比？

10. 太阳的热核反应会引起太阳质量减少，请计算在 100 年内太阳的这种质量减少能够引起地球公转轨道半径的增加量。假定在此过程中地球一直保持正圆轨道。