

# 第十四届国际天文与天体物理奥林匹克竞赛

## 理论试题

哥伦比亚 波哥大(线上) 2021年11月17日

### 1. LIGO

2016年, LIGO(激光干涉引力波天文台)宣布第一次探测到了引力波GW150914. 探测到的信号对应于两个质量分别为 $35M_{\odot}$ 和 $30M_{\odot}$ 的黑洞合并, 合并后形成一个质量为 $62M_{\odot}$ 的黑洞. 忽略黑洞的旋转能量, 你可以假设这个过程所释放的能量( $E_{\text{GW}}$ )完全以引力波的形式发射出来, 这在2015年被干涉仪观测到. 已知一颗超新星(SN)的爆发会释放出 $E_{\text{SN}} = 2 \times 10^{44} \text{ J}$ .

**1.1** 为了得出这两个事件(SN、GW)中哪个释放出更多的能量, 请估计能量比  $\frac{E_{\text{SN}}}{E_{\text{GW}}}$ .

### 2. 地球的温度

至少在过去几百万年里, 地球与地球轨道距离上的太阳辐射一直处于大致的热平衡状态.

**2.1** 假设我们的行星是一个理想的黑体, 计算地球的平衡温度(摄氏度)会是多少.

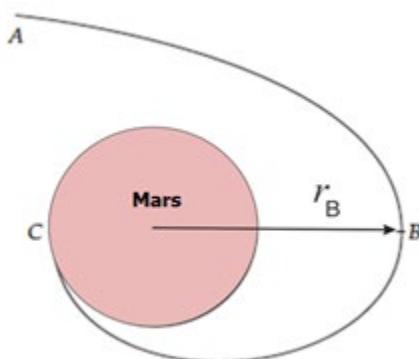
**2.2** 地球的反照率约为30%. 考虑到地球的反照率, 计算地球的表面温度(摄氏度).

**2.3** 地球吸收的辐射作为黑体辐射从其表面重新释放出来, 但其大气层重新吸收了58%的能量, 造成了温室效应. 考虑到这种效应, 请计算地球的表面温度(这将与低层大气的温度相同). 请以摄氏度为单位给出你的答案.

为简单起见, 考虑重吸收效应只发生一次, 不要把大气层看作一个独立的黑体.

### 3. 火星

一个质量为 $m = 5.0 \times 10^4 \text{ kg}$ 的航天器以相对于火星的抛物线轨道 $AB$ 接近. 当航天器到达与火星中心距离最小的点 $B$ 时,  $r_B = 6.8 \times 10^6 \text{ m}$ , 它利用火箭进行瞬间减速, 进入一个完美计算的轨道, 使得它将正好在与 $B$ 相对的点 $C$ 接触火星表面, 正如图中所示.



**3.1** 确定航天器在减速前的 $B$ 点的速度( $\text{km s}^{-1}$ ).

**3.2** 计算航天器在B点和C点之间移动时的总能量(J).

**3.3** 计算航天器在C点的速度(km s<sup>-1</sup>).

## 4. ALMA - 计算光子

ALMA是一个具有革命性设计的射电天文台. 它由66个高精度天线组成, 工作波长范围为0.32 mm至8.60 mm. 主阵列有50个天线, 每个直径12 m, 可以作为一个单一的望远镜在所谓的干涉模式下一起工作. 还有一个由四个12 m的天线组成的阵列, 以及12个每个直径为7 m的较小的天线.

想象一下, 一个12 m的天线正在被校准, 指向一个已知的入射通量为 $1 \times 10^{-20}$  W/m<sup>2</sup>的源.

**4.1** 假设所有的通量都到达ALMA灵敏度的最短波长, 请确定每秒钟到达探测器的平均光子数量.

**4.2** 将其与如果所有的通量都到达最长的工作波长时到达探测器的平均光子数量进行比较.

**4.3** 一根12 m长的天线, 在74.9 GHz下工作, 其角分辨率是多少(以角秒为单位)?

**4.4** 想象一下, 主阵列在74.9 GHz的干涉模式下工作. 为简单起见, 假设空间分辨率仅由最长的基线(任何一对天线之间的最大距离)给出, 即 $D_{\max} = 16$  km, 在这种情况下, 角分辨率(以角秒为单位)是多少?

将这种情况视为单缝孔径而不是圆形孔径.

**4.5** 对于射电天线, 术语SEFD指的是“系统等效通量密度”, 它是天线的特征能量通量密度, 取决于其温度和尺寸. 我们还注意到, 对于射电光子的能量估计, 瑞利-金斯近似是有效的. 假设系统温度为691 K, 如果所有66根天线都能一起工作, 那么以央斯基为单位的整个ALMA观测站的SEFD将是多少?

## 5. 在压力下

太阳中的磁场不断地塑造着太阳大气中各种不同特征的结构, 在任何特征内部, 磁场( $B$ )增加了气体施加的总压强. 这个所谓的磁压是高度 $z$ 的函数, 可以表示为:

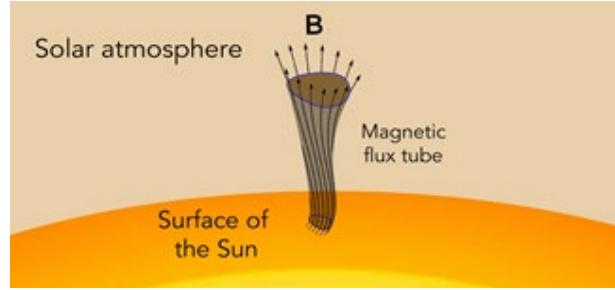
$$P_{\text{mag}}(z) = \frac{B^2(z)}{2\mu_0}$$

另一方面, 可以认为气体处于静力平衡状态, 因此, 气体压强从初始压强值 $P_0$ 随着 $z$ 的增加呈指数式衰减,

$$P_{\text{gas}}(z) = P_0 e^{-z/H}$$

其中 $H$ 是标高, 即压强下降到 $\frac{P_0}{e}$ 时的高度.

考虑一种类型的特征, 即一个从太阳表面上升到非磁化环境的磁通管(见下图). 假设管内材料和管外材料的总压强处于平衡状态.



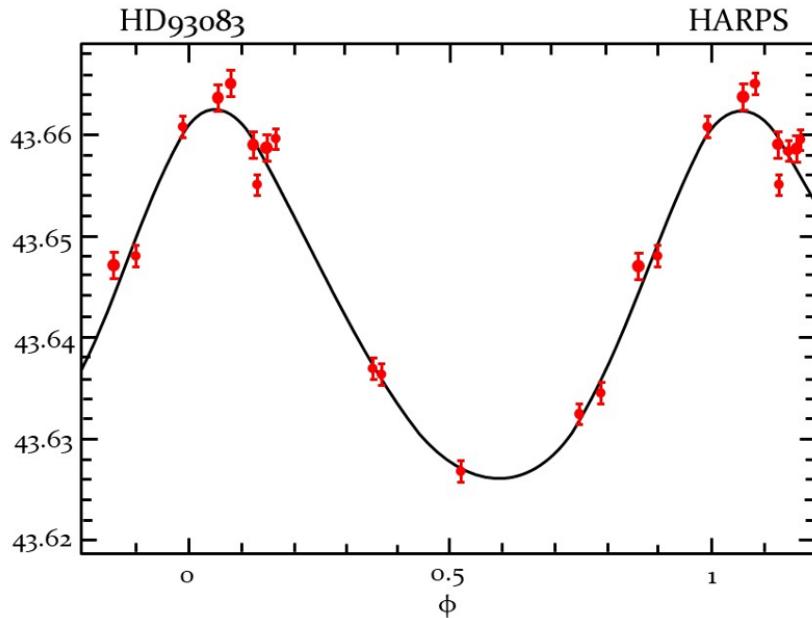
5.1 找出磁场强度与高度 $z$ 的函数表达式.

5.2 如果磁通管底部的磁场是0.3 T, 在一个给定的太阳模型中, 标高 $H$ 是150 km, 那么在什么高度磁场会减少到0.03 T?

## 6. Macondo和Melquiades

2019年, 作为国际天文学联盟NameExoWorlds活动的一部分, 哥伦比亚获得了为HD 93083星及其行星系统选择名称的机会. HD 93083是一颗K型矮星, 有一颗太阳系外行星围绕着它运行. 今天, 它们被正式称为Macondo(恒星)和Melquiades(行星), 来自哥伦比亚作家Gabriel García Márquez的文学思想.

这颗恒星的有效温度为4995 K, 视亮度为8.3等. 根据GAIA DR2, Macondo的视差是35.03毫秒. 你可以假设Melquiades的轨道是完全圆形的. 在图中, 你可以看到Macondo的径向速度与相位的关系图.



Macondo的径向速度( $\text{Y轴, km s}^{-1}$ )与相位( $\text{X轴}$ )的关系.

6.1 找出Macondo在其静止参考系内(即忽略多普勒频移)的峰值发射波长(以nm为单位).

6.2 找出这个系统与地球的距离(以秒差距为单位)和该星的绝对目视星等( $M_V$ ).

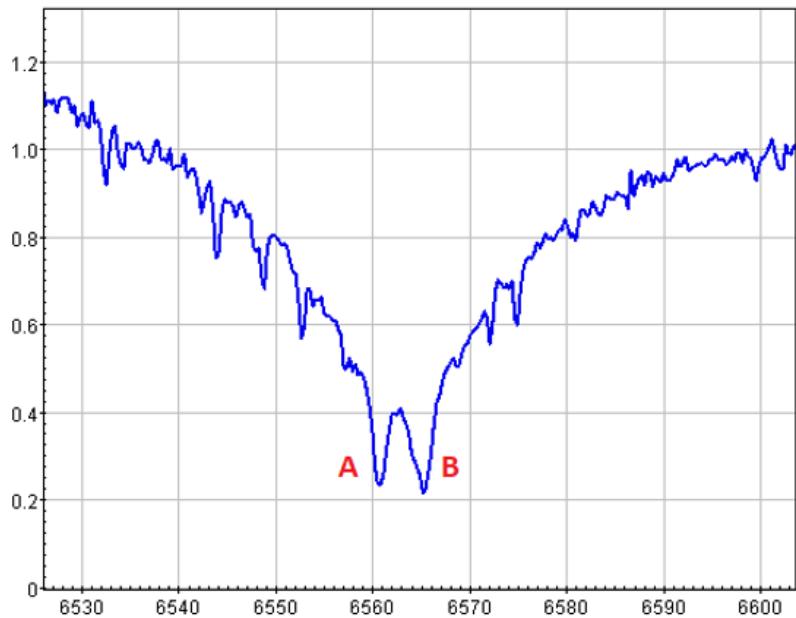
6.3 计算Macondo的平均径向速度(单位:  $\text{km s}^{-1}$ ).

6.4 如果恒星的质量( $m_s$ )为 $0.7 M_\odot$ , 系外行星的质量( $m_p$ )为 $7 \times 10^{26} \text{ kg}$ , 计算Melquiades的轨道速度 $v_p$  (单位:  $\text{km/s}$ ). 假设该系统的轨道平面相对于我们的视线来说是边缘对齐的.

6.5 找出Melquiades的轨道半径(au)和它的轨道周期(天).

## 7. 五车三(御夫座 $\beta$ )

我们看到的几乎一半的恒星都是双星或多星系统. 一个著名的例子是五车三(御夫座 $\beta$ ), 它最初被认为是一颗恒星, 但现在被认为是一个由两颗恒星组成的双星系统, 我们将其称为五车三A和B. 在下图中, 显示了该系统的光谱(由波哥大的安第斯大学的观测站获得).



在H $\alpha$ 区域的五车三双星系统的光谱. Y轴是相对流量, X轴测量波长. 五车三A在图中被标记为A, 而五车三B被标记为B.

利用该图回答下列问题, 并注意实验室参考系内H $\alpha$ 线的波长为656.28 nm. 假设是圆形轨道, 并假设双星系统作为一个整体相对于观察者是静止的.

7.1 在光谱中, 我们可以看到该系统中每颗恒星的H $\alpha$ 线. 计算每颗恒星的视向速度(km/s), 并确定在这次观测时, 这两颗恒星中的哪一颗正在向我们移动.

7.2 这个双星系统距离地球81.1光年, 轨道周期为3.96天. 经测量, 五车三B(较小的恒星)的半长轴为3.35毫角秒. 如果这两颗成员星的质量比为1.026, 请找出该系统的总质量(以太阳质量计).

7.3 计算五车三A和B的单个质量, 以太阳质量计.

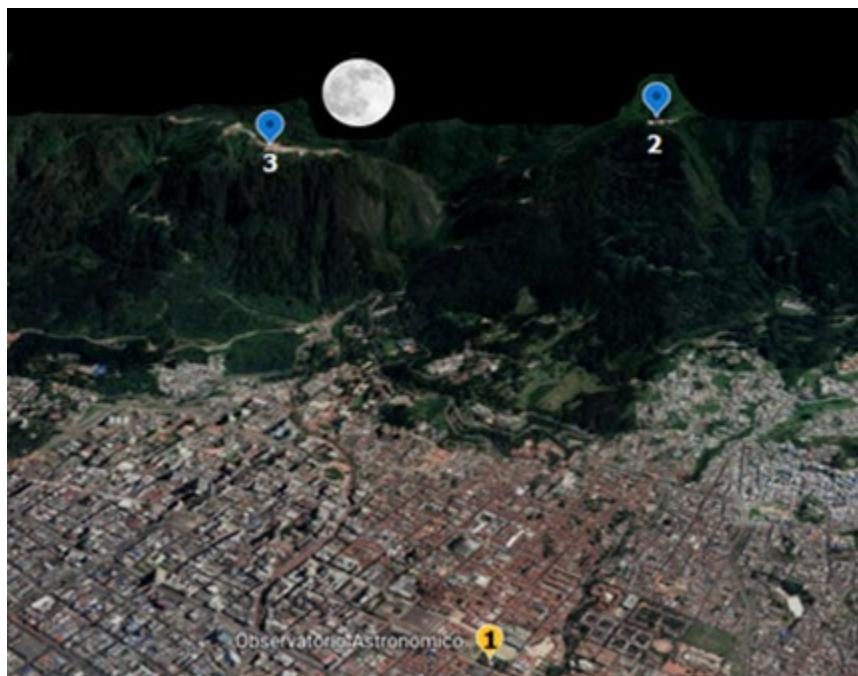
7.4 由于五车三A和B是主序星, 所以使用关系

$$\frac{L}{L_\odot} = \left(\frac{M}{M_\odot}\right)^{3.5}$$

来估计每颗恒星的光度(以太阳光度计).

## 8. IOAA标志

IOAA2021的标志由缩写IOAA构成, 其中第一个字母由哥伦比亚国家天文台(OAN)的建筑剪影表示, 这是美洲最古老的天文台. 这个天文台位于波哥大, 成立于1803年. 哥伦比亚的首都与两座著名的山丘接壤, 即Monserrate和它的邻居Guadalupe, 它们是波哥大城市景观的标志, 装饰着标志的背景.



波哥大市的鸟瞰图. 数字表示引用的地点: 1是OAN; 2是Guadalupe; 3是Monserrate.

点	纬度	经度	海拔(高于海平面, 米)
1	4°35'53"N	74°04'37"W	2607
2	4°35'30"N	74°03'15"W	3296
3	4°36'18"N	74°03'19"W	3100

**8.1** 估计2号点(Guadalupe)和3号点(Monserrate)之间的距离(km).

**8.2** 估计从哥伦比亚国家天文台(1)观测到的Guadalupe(2)和Monserrate(3)之间的角距离(单位: 度).

**8.3** 9月21日晚上8点, 从OAN观察到月球向东边的山丘(在Monserrate和Guadalupe之间). 测得的月球的黄道坐标(经度和纬度)见表. 确定观测时月球的赤道坐标.



当地时间: 8:00 p.m.
$Az: +90^\circ 42' 59'' / Alt: +19^\circ 01' 42''$
$\lambda: +12^\circ 20' 16'' / \beta: -04^\circ 24' 14''$

注: 方位角从北向东测量.

## 9. 冥王星的卫星

**9.1** 冥王星的最大卫星卡戎的质量是冥王星质量的 $1/8$ . 这两个天体都围绕一个共同的质心在圆形轨道上运动. 此外, 它们都是潮汐锁定的.

行星中心和卫星中心之间的距离是 $R = 19640$  km, 卫星的半径是 $r = 593$  km.

设 $g_0$ 为卡戎表面的重力加速度, 仅由其质量引起. 设A是卡戎表面直接面对冥王星的那一点, B是相对的一点. 计算A和B的重力加速度相对于 $g_0$ 的百分比差异.

## 10. 地球凌日

注: 在下面的两个问题中都假设是完美的圆形轨道.

**10.1** 一位来自遥远的行星系统的外星天文学家正在观察太阳. 突然间, 由于地球在它前面通过, 太阳的亮度下降了. 这次凌日可能持续的最长时间是多少(以小时为单位)? 假设该天文学家观察的行星没有相对于太阳的移动.

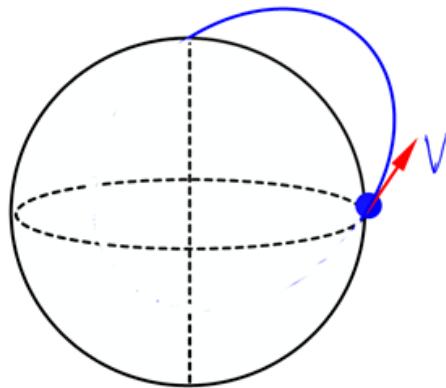
**10.2** 想象一下, 从地球上看到的某颗系外行星的凌星持续了31分钟. 主星是一颗红矮星, 其质量和半径是太阳质量和半径的10%. 这颗系外行星可能具有的最小轨道周期是多少(以天计)?

## 11. 抛射物的最小速度

11.1 从赤道的地球表面发射一个抛射物, 使抛射物到达北极的最小速度是多少?

11.2 求抛射物的轨迹的偏心率

你可以忽略地球的旋转. 同时假设地球表面是球形的.



参考图

## 12. 速端曲线

在行星围绕恒星的曲线运动中, 速度矢量的方向不断变化. 这可以用所谓的“速度空间的轨迹”来表示, 其获得方法如下: 对于空间轨迹上的每一个点, 画出相应的速度矢量, 使其起点位于速度空间的原点, 其大小和方向与该点的速度矢量相同. 这个可变速度矢量的尖端在速度空间中产生了一条曲线. (汉密尔顿在1846年为这条曲线命名为“速端曲线”).

作为一个例子, 请看下面的图1和图2. 对于一个圆形轨道(图1), 速度的大小是恒定的, 因此, 开普勒圆周运动的速度矢量的速端曲线(图2)也是一个圆, 其中心位于速度空间的原点. 这个圆的半径等于圆周速度的恒定大小.

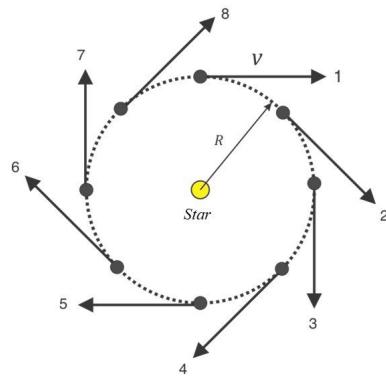


图1 围绕恒星做匀速圆周运动的行星的空间轨迹.

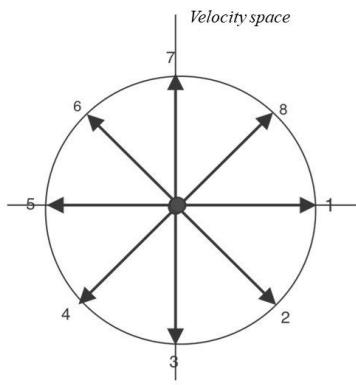


图2 相应的速端曲线

**12.1** 请写出图2中速端曲线的半径, 作为恒星质量 $M$ , 行星运动的圆形轨道半径 $R$ 的函数.

**12.2** 对于处于开普勒轨迹的行星, 请写出向心加速度矢量( $\mathbf{a}$ )和角动量大小( $L$ )的表达式. 对于任何开普勒轨迹来说, 有

$$|\Delta v| = k\Delta\theta \quad (1)$$

其中 $k$ 是每种开普勒轨迹的常数. 请找出常数 $k$ 与恒星和行星的质量 $M$ 和 $m$ 以及角动量 $L$ 之间的函数关系.

公式(1)允许我们得出结论, 对于任何开普勒轨迹来说, 速端曲线( $v$ 作为 $\theta$ 的函数)是一个圆, 但是除了圆周运动, 速端曲线的中心并不与恒星重合. 没有必要证明这个结果, 你可以简单地接受它作为一个已知条件. 对于匀速圆周运动的速端曲线, 符合公式(1)的情况是完全明显的, 如图3所示.

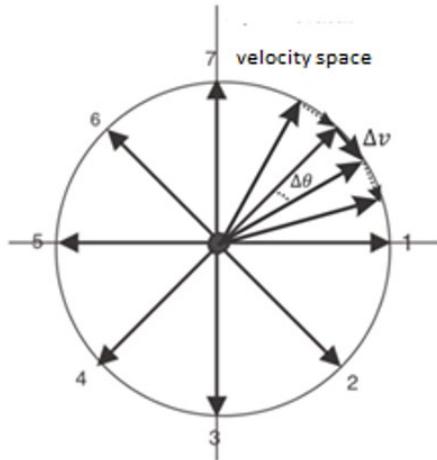


图3

**12.3** 确定行星圆周运动速端曲线的常数 $k$ 的表达式.

**12.4** 鉴于开普勒椭圆运动的速端曲线是一个圆, 请确定这个速端曲线的半径以及速端曲线中心与恒星位置之间的距离, 作为近点速度和远点速度的函数. 根据图4所示的示意图, 在答题纸上画出一个粗略的速端曲线. 黑圈是恒星.

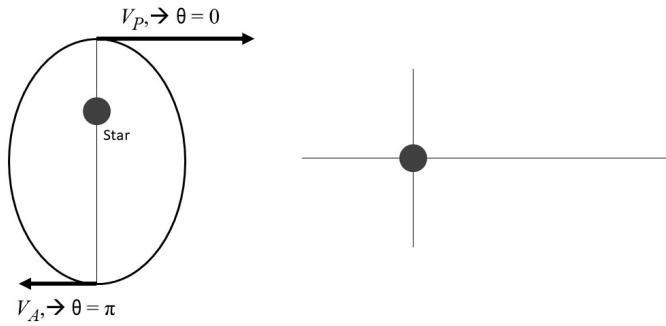


图4

**12.5** 同样地, 对于抛物线开普勒轨迹, 确定相应的速端曲线的半径以及从该速端曲线圆心到恒星的距离. 将半径表示为近点速度的函数. 在答题纸上画出一个粗略的速端曲线的草图.

### 13. Lucy: 第一个前往特洛伊小行星的任务

空间探测器上的CCD相机非常敏感, 并暴露在空间天气条件下. 穿过CCD的强烈辐射在CCD芯片的硅中产生电子-空穴对. 在操作航天器上的相机时, 这些电子对产生的速度是一个重要的参数, 并且可以对任何特定能量的辐射进行计算.

一个高能量的粒子或辐射的光子通过CCD时, 它产生的每个电子-空穴对都会在芯片中沉积一些能量. 硅对特定类型的粒子的“阻止力”可以测量为硅从移动的粒子中“带走”的每一面密度(面密度=每单位面积的质量)的能量.

美国宇航局的Lucy任务将是第一个研究特洛伊小行星的任务, 将彻底改变我们对太阳系形成的认识. 船上的仪器之一是L'LORRI(Lucy LOng Range Reconnaissance Imager), 它包含一个敏感的CCD, 以便制作特洛伊小行星的详细图像. 不幸的是, 木星周围的辐射非常强烈, 它会在CCD的像素中产生大量的“噪音”.

让我们假设一个被困在木星磁场中的带电粒子的平均能量为15 MeV, 并且该区域的这种粒子的流量相当于大约 $600 \text{ e}^{-} \text{ s}^{-1} \text{ cm}^{-2}$ . 还假设, 对于通过一个像素的粒子所产生的每一个电子-空穴对, 它在该像素中正好沉积了该对的激发能量. 当像素超过电子-空穴对的阈值数量后, 它就被“激发”了, 在该像素中不能再产生任何电子-空穴对. 粒子中的任何剩余能量都被传递给下一个像素(以此类推).

利用下面给出的L'LORRI相机中CCD芯片的数据, 回答下列问题.

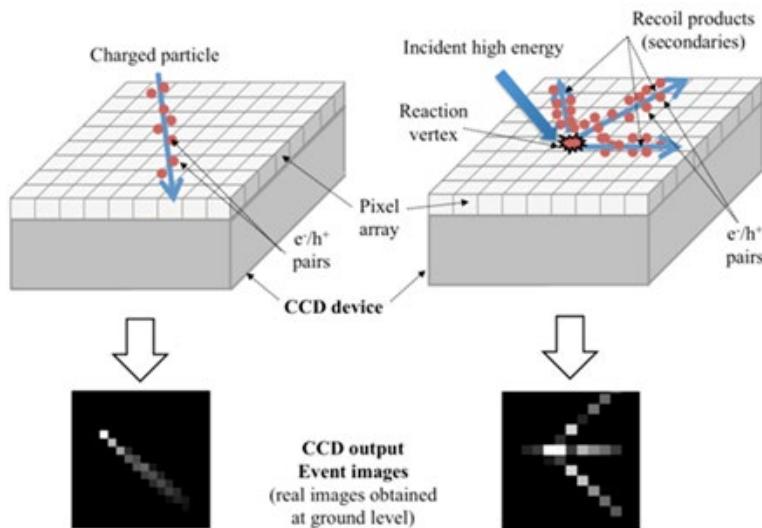
**13.1** 当航天器在木星轨道附近时, 一个这样的辐射粒子通过CCD会激发多少个像素?

**13.2** 鉴于木星附近的辐射通量, 图像中的像素总数有多大比例会被激发?

#### CCD数据:

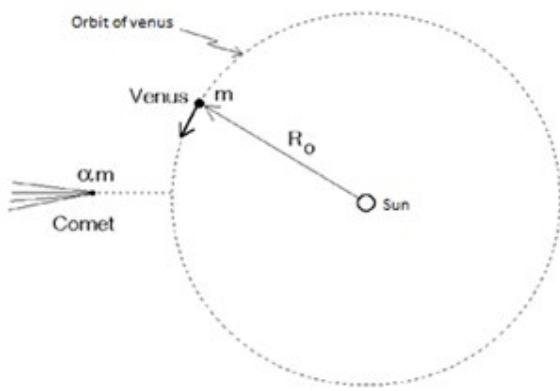
- 一幅图像的曝光时间 = 30 ms
- CCD上的像素 =  $1024 \times 1024$
- CCD面积 =  $13 \text{ mm} \times 13 \text{ mm}$
- CCD芯片厚度 = 0.06 cm
- 硅的密度  $\rho = 2.34 \text{ g cm}^{-3}$

- 单对的激发能量 = 2.36 eV
- 单一像素的激发阈值 = 250对
- 硅对15 MeV电子的停止功率 =  $3.012 \text{ MeV g}^{-1} \text{ cm}^{-2}$



## 14. 金星-2的形成

一颗质量为 $\alpha m$ 的彗星在径向上向太阳飞去(“坠落”). 已知彗星的总机械能为零. 彗星撞上了质量为 $m$ 的金星. 我们进一步假设, 在碰撞之前, 金星的轨道是半径为 $R_0$ 的圆形. 碰撞后, 彗星和金星形成一个单一的物体, 称为“金星-2”.



14.1 用 $M_{\text{sun}}$ 和 $R_0$ 求出金星碰撞前的轨道速度 $v_0$ 的表达式.

14.2 找出金星在与彗星碰撞前在其轨道上的总机械能的表达式.

14.3 找出“金星-2”在碰撞后的径向速度 $v_r$ 和角动量 $L$ 的表达式.

14.4 找出组合体“金星-2”的机械能的表达式, 并用碰撞前的能量 $E_i$ 和 $\alpha$ 来表示.

14.5 证明“金星-2”的碰撞后轨道是椭圆的, 并确定该轨道的半长轴.

14.6 确定“金星-2”上的居民的一年长度是否因为与彗星的碰撞而被缩短或延长了. 写出金星2号和金星的周期之比.

**14.7**  $\alpha$ 的值应该是多少, 才能使金星-2号的碰撞后坠入太阳? 我们将其称为 $\alpha_c$

**14.8** 一颗 $\alpha = \alpha_c$ 的彗星与金星发生碰撞. 计算碰撞后金星速度大小的变化百分比( $\delta v$ )和速度矢量方向的变化( $\delta\theta$ ).

## 15. 宇宙弦

### 简介

根据我们目前的理解, 在大爆炸之后, 当宇宙非常热的时候, 电磁力、强核力以及弱核力被统一为一种大统一力.

当宇宙冷却到 $T_{\text{GUT}} = 1029$  K时, 强核力与弱电力解耦. 后来, 当温度降低到 $T_{\text{EW}} = 1015$  K时, 弱力与电磁力解耦. 这些转变是在大爆炸后的一小段时间内快速连续发生的. 人们认为, 这些相变产生了各种奇特的物体, 称为真空缺陷, 今天仍然可以观察到.

本问题将讨论这种可能的缺陷类型之一的属性, 即宇宙弦及其观测效应.

**注1.** 除非另有说明, 否则请使用牛顿力学定律.

**注2.** 你将使用以下常数:

- 斯特藩-玻尔兹曼常数

$$\sigma = \frac{2\pi^5 k_{\text{B}}^4}{15h^3 c^2} = \frac{\pi^2 k_{\text{B}}^4}{60\hbar^3 c^2}$$

- 约化普朗克常数

$$\hbar = \frac{h}{2\pi}$$

- 通用辐射常数

$$a = \frac{4\sigma}{c} = 7.5657 \times 10^{-16} \text{ J m}^{-3} \text{ K}^{-4}$$

- 普朗克温度

$$T_{\text{pl}} = \sqrt{\frac{\hbar c^5}{G k_{\text{B}}^2}} = 1.416784 \times 10^{32} \text{ K}$$

**注3.** 回顾一下, 引力场 $\mathbf{g}$ 满足高斯定理的要求:

$$\mathbf{g} \cdot \mathbf{A} = -4\pi GM_{\text{in}}$$

其中 $M_{\text{in}}$ 是表面 $A$ 所包围的质量.

### A部分: 宇宙弦的引力场

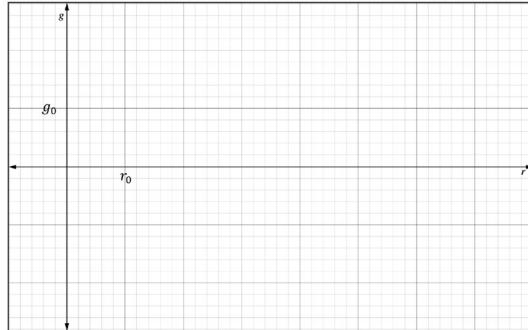
作为一级近似, 让我们把宇宙弦视为一个半径为 $r_0$ 、单位长度质量为 $\mu$ 的无限长的圆柱体.



**A.1** 用常数  $G$ 、 $\mu$  和  $r_0$  写出弦所产生的引力场  $\mathbf{g}(r)$  的表达式. 单独考虑  $r_0 < r$  和  $r_0 > r$  的情况

**A.2** 用常数  $G$ 、 $\mu$  和  $r_0$  写出  $g_0 \equiv |\mathbf{g}(r_0)|$  的表达式.

**A.3** 将  $g$  定义为  $\mathbf{g}(r) \cdot \hat{r}$ . 请在答题纸中画出  $g$  关于  $r$  的粗略图.



**A.4** 有可能定义一个围绕宇宙弦的稳定轨道. 对于半径  $R > r_0$  和周期  $\tau$  的圆形轨道, 可以得到以下关系

$$R = A\tau^\alpha$$

其中  $A$  和  $\alpha$  是常数. 在  $G$  和  $\mu$  的条件下找到  $A$  和  $\alpha$

以下三个问题是关于一个经典的牛顿粒子在离弦的距离  $r > r_0$  时以速度  $v$  运动. 你将需要使用下面的结果:

$$\int_{x_0}^x \frac{dx}{x} = \ln\left(\frac{x}{x_0}\right)$$

**A.5** 证明粒子的引力势能为

$$U = Gm\mu \ln\left(\frac{r}{b}\right)$$

其中  $b$  是任意固定的距离.

**A.6** 粒子能到达的与弦的最大距离  $R_{\max}$  是多少?

**A.7** 粒子有可能逃离引力场吗？在答题纸上写下“YES/NO”。

## B部分：作为光子气的宇宙弦

现在将宇宙弦视为半径为 $r_0$ 的极长圆柱体内的光子气，圆柱体的壁是绝热的，在温度 $T$ 下处于热平衡状态。

**B.1** 用 $T$ 、 $\hbar$ 、 $k_B$ 和 $c$ 表示弦的能量密度 $\rho$ 是多少？

**B.2** 半径 $r_0$ 与温度 $T$ 的关系为

$$r_0 = \frac{\hbar^{n_1} c^{n_2}}{k_B T},$$

其中 $\hbar$ 是约化普朗克常数， $c$ 是真空中的光速， $k_B$ 是玻尔兹曼常数， $n_1$ 和 $n_2$ 是整数。确定 $n_1$ 和 $n_2$

**B.3** 用 $\rho$ 和 $r_0$ 表示弦的单位长度质量 $\mu$ 是多少？

**B.4** 只用 $T$ 和 $T_{\text{pl}}$ 表示弱场条件的不等式，定义为

$$\frac{2G\mu}{c^2} \ll 1$$

**B.5** 计算 $\frac{2G\mu}{c^2}$ ，当

- $T = T_{\text{EW}}$
- $T = T_{\text{GUT}}$

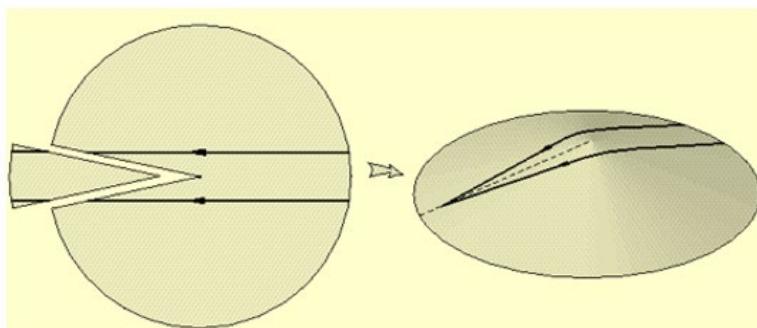
**B.6**  $T_{\text{EW}}$ 的弱场条件是否成立？回答YES或NO。

$T_{\text{GUT}}$ 的弱场条件是否成立？回答YES或NO。

## C部分：来自宇宙弦的引力透镜

到目前为止，在A和B部分，我们忽略了弦内光子气的内部压强。如果我们把它包括在我们的分析中，我们需要考虑广义相对论。

在解出爱因斯坦场方程后，人们发现宇宙弦周围的时空是圆锥形的，就像从平坦的薄片上移开一个狭窄的楔子，并将其边缘连接起来，如下图所示。



[http://www.ctc.cam.ac.uk/outreach/origins/cosmic\\_structures\\_five.php](http://www.ctc.cam.ac.uk/outreach/origins/cosmic_structures_five.php)

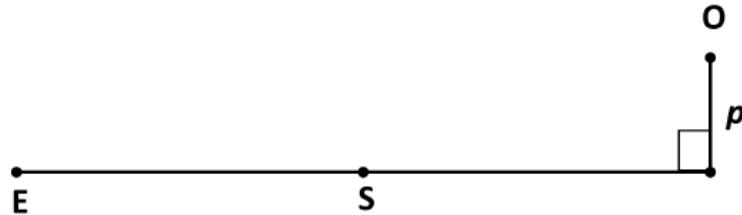
这个模型的一个显著结果是光被宇宙弦偏转，这带来了通过引力透镜进行探测的可能性。

来自遥远的类星体(下图中的O)的光线，在经过宇宙弦(下图中的S)附近并最终到达地球上的观测者(下图中的E)时，其偏转角度(以弧度为单位)为

$$\delta\phi = \frac{4\pi G\mu}{c^2}$$

并且与参数 $p$ 无关, 如下图所示.

图中E和O在垂直于弦的平面内. 观察者与弦的距离为 $D_{ES}$ , 观察者与源的距离为 $D_{OE}$



**C.1** 尽管偏转角不取决于参数 $p$ , 但只有当 $p$ 的值在一定范围内时, 地基观测者才能看到一个以上的像. 用 $D_{ES}$ 、 $D_{OE}$ 和温度 $T$ 表示参数 $p$ 值的条件, 使地基观测者能看到物体O的一个以上的像.

**C.2** 如果观察者看到一个以上的像, 那么每一对像之间的角距离是多少? 用 $D_{ES}$ 、 $D_{OE}$ 和 $\delta\phi$ 表示

**C.3** 如果 $D_{OE} = 2D_{ES}$ , 请确定能分辨这个由GUT弦产生的透镜事件所需的最小光学望远镜的尺寸.