

# 第十五届国际天文与天体物理奥林匹克竞赛

## 理论试题

格鲁吉亚 库塔伊西 2022年8月16日

### 1 普朗克单位

在马克斯·普朗克的自然测量单位系统(宇宙学中常用的)中,所有单位都用4个基本常数来表示:光速( $c$ )、宇宙万有引力常数( $G$ )、约化普朗克常数( $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ )和玻尔兹曼常数( $k_B$ ). 另外,  $(4\pi\epsilon_0)$ 也包含在这个常量列表中.

使用量纲分析,找出以下量的表达式

- 普朗克长度( $L_P$ ),
- 普朗克时间( $t_P$ ),
- 普朗克质量( $m_P$ ),
- 普朗克温度( $T_P$ ),
- 普朗克电荷( $q_P$ ).

### 2 环绕双星的行星

一个恒星系统由两个主序星组成,每个主序星 $2M_\odot$ 在一个圆形轨道上运行,周期为4年. 环绕双星的行星在相同的轨道平面和方向上以固定的20 au距离围绕双星系统的中心运行.

- 计算行星相对于双星系统重新出现在同一位置所需的时间.
- 在给定的时刻,行星表面接收至少一颗恒星发出的光的最大面积是多少? 忽略任何大气影响和恒星的大小.

### 3 膨胀的环状星云

一个行星状星云,距离地球100 pc,形状是一个完美的圆环,内半径为 $7.0'$ ,外半径为 $8.0'$ . 它的光度是由星云中心的白矮星残余物的紫外线辐射提供的. 通过其他观测,我们知道2000年前,星云的内半径是 $3.5'$ ,外半径是 $4.0'$ . 我们认为在这2000年中,星云的演化服从于自由膨胀的情况,因此引力可以忽略不计,膨胀速度随时间保持不变. 假设行星状星云中的所有物质都是在同一时刻喷射出来的,但是不同的气体粒子具有不同的速度.

- 估计气体粒子的速度范围
- 自由膨胀的假设是否有道理? 写出“YES”或“NO”,并附上适当的计算结果.
- 如果这个行星状星云足够明亮,国际空间站上的宇航员是否能够清楚地分辨外壳的厚度? 写出“YES”或“NO”,并附上必要的计算.

### 4 星系之间的旅行

我们开始了一段漫长的旅程,前往位于距离 $d_0 = 10$  Mpc(在我们的旅程开始时)的行星. 在我们旅行期间,宇宙根据哈勃-勒马特定律不断膨胀. (假设哈勃常数( $H$ )没有变化).

- 写出从我们的旅程开始的时间 $t$ ,地球和行星之间的距离的表达式.

(b) 火箭应该有多小的恒定速度  $v_0$  才能到达目的地? 假设我们的火箭的速度为  $v_0 = 1000 \text{ km/s}$ , 我们能到达行星吗? 写出“YES”或“NO”. 如果可以, 我们的旅程将需要多长时间?

**提示:** 解释我们宇宙膨胀的一个简化方法是引入一个“标度因子”  $a(t)$ , 它将两个物体之间的距离  $l(t)$  在时间  $t$  与时间  $t = 0$  时的距离  $l_0$  联系起来, 即  $l(t) = a(t)l_0$

## 5 燃烧的原行星盘

行星是年轻恒星周围形成环星盘的云层坍缩的产物. 在这个问题上, 我们研究了一种原行星盘的热结构. 我们认为来自中心恒星的辐射是最主要的加热过程, 并假设星盘是有光学厚度的, 辐射只能在星盘的表面层被吸收. 这种类型的星盘被称为**燃烧**的星盘(见下文图1). 在这种情况下, 恒星直接照亮圆盘的表面, 光线和圆盘表面之间的浅角  $\beta$  随着与恒星的距离增加而增大.

(a) 假设  $h(r) \ll r$ , 找到  $\beta$  与  $r$  的函数表达式.

提示: 该表达式涉及  $h(r)$ 、 $r$  和  $\frac{\Delta h(r)}{\Delta r}$

(b) 找出盘的平衡温度 ( $T_D$ ) 作为  $\beta(r)$ 、 $r$  和恒星光度 ( $L_s$ ) 的函数的表达式(忽略恒星的大小).

(c) 我们将圆盘高度参数化为  $h(r) = ar^b$ , 其中  $a$  和  $b$  是常数.  $a$  和  $b$  取什么值时能够满足等温层的条件 ( $T_D = \text{常数}$ )? 用  $T_D$  和  $L_s$  写出你对常数  $a$  的答案.

**提示:** 如果  $\Delta r \ll r$ , 那么  $(1 + \frac{\Delta r}{r})^b \approx 1 + \frac{b\Delta r}{r}$ .

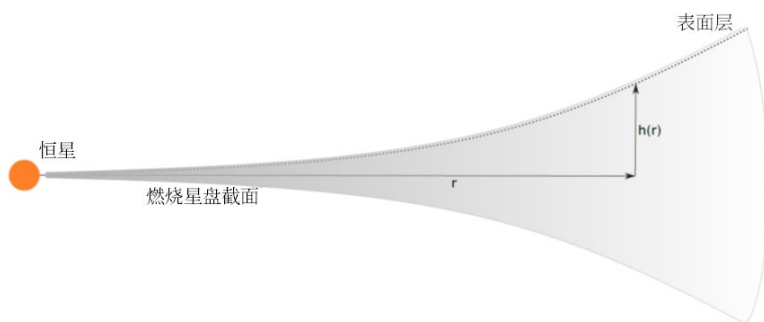


图1: 燃烧星盘的横截面

## 6 双星的测光

我们观测到一个双星系统, 距离  $d = 89 \text{ pc}$ , 围绕共同质心的圆形侧向轨道, 周期为100天. 我们的天基望远镜的直径为  $D = 10 \text{ m}$ , 工作波长为  $\lambda = 364 \text{ nm}$ . 我们注意到, 在每个完整的周期中, 总共有38天, 这两颗恒星不能被这个望远镜作为独立的天体加以分辨. A星的峰值发射波长为  $\lambda_A = 500 \text{ nm}$ , B星的峰值发射波长为  $\lambda_B = 600 \text{ nm}$ .

(a) A和B星的温度是多少, ( $T_A$ ,  $T_B$ )

(b) 计算恒星之间的距离  $L$

(c) 计算恒星的质量之和 ( $M_T$ ).

该系统的综合测光:

	构型	$U_0$	$(U - B)$	$(B - V)$	BC
1	恒星在各自旁边	6.39	0.2	0.1	0.1
2	B在A的前面穿过	6.86	0.25	0.12	0.175

$U$ 的每kpc的星际消光为 $a_U = 1.4 \text{ mag/kpc}$ . 恒星的密度之比 $\rho_A/\rho_B = 0.7$

注: 对于热改正, 我们使用惯例:

$$BC = m_{\text{bol}} - m_V$$

(d) 计算两颗星的质量( $M_A, M_B$ ).

## 7 从格鲁吉亚到佐治亚

天文学家凯托沿着最短的路线连夜向西飞行, 从第比利斯(格鲁吉亚的首都)到亚特兰大(美国佐治亚州的首府). 她注意到, 在整个飞行过程中, 她都能从飞机的一个窗口观察到孙增一( $\zeta \text{ CMa}$ )(尽管它有一次触及地平线, 当时它也恰好在正南方向).

计算她登陆的亚特兰大的纬度 $\phi_B$ 和经度 $\lambda_B$ .

已知:

- 这次旅程持续了11小时25分钟, 飞机的平均速度为875 km/h.
- 孙增一的赤纬为 $\delta_F = -30^\circ 4'$ .
- 第比利斯的坐标是 $\phi_A = 41^\circ 43' \text{N}$ ,  $\lambda_A = 41^\circ 48' \text{E}$ .
- 你应该忽略飞行过程中地球的自传、飞机的高度、大气折射和任何风的影响.

## 8 行星环

我们得到一个质量为 $M$ 的平坦圆盘, 内半径为 $r$ , 外半径为 $R$ .

(a) 一个质点 $m$ 位于圆盘的对称轴上, 与圆盘平面的距离为 $x$ (我们自始至终假定质量 $m$ 保持在对称轴上, 并且可以在垂直方向上自由移动). 施加在该质点上的引力是多少?

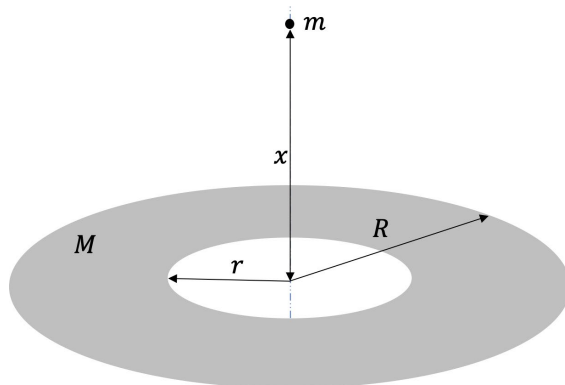


图2: 质点周围的平盘

**提示1:** 你可以用符号 $\sigma$ 表示面密度, 并计算一个小的面元 $\Delta S$ 所施加的力, 它对 $m$ 的立体角为 $\Delta\Omega$ .

**提示2:** 张角为 $2\theta$ 的圆锥体在半径为 $R$ 的球体上切下的面积:

$$S = 2\pi R^2 [1 - \cos(\theta)]$$

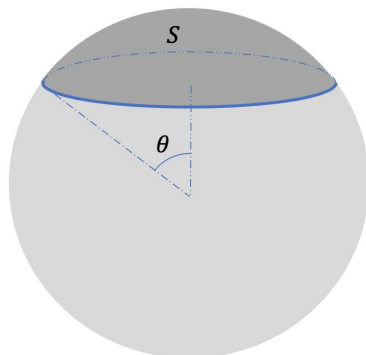


图3: 圆锥体在球体上切出的面积

(b) 系统的小幅振荡的频率将是多少( $x \ll r$ ).

## 9 水星上的太阳逆行运动

水星的轨道有一个异常高的偏心率. 此外, 它的恒星自转周期是恒星年的 $\frac{2}{3}$ . 由于这些因素, 当水星接近近日点时, 太阳会在水星的天空中表现出逆行运动.

计算在水星围绕太阳的一次公转中, 这种明显的太阳逆行运动的总时间. 用地球日表示你的答案.

## 10 吸积

考虑一个致密天体(如黑洞、白矮星或中子星)有一个球对称的气体吸积球, 假设吸积的气体是氢气. 当粒子落入天体时, 它们会发热并辐射, 从而产生辐射压力, 作用于吸积物质的其余部分. 这个力由以下公式给出.

$$F_L = \sigma_e \frac{I}{c}$$

$$\text{其中, } \sigma_e = \frac{8\pi}{3} \left( \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e c^2} \right)^2$$

是电子的汤普森截面,  $c$ 是光速,  $I$ 是光的强度. 尽管 $F_L$ 是针对电子计算的, 但它有效地作用于整个原子.

(a) 如果中心致密天体的质量为 $M$ , 请求出爱丁顿极限( $L_E$ )的表达式, 它是吸积球的最大可能光度.

(b) 对于一个特定的致密天体, 由于物质吸积而产生的光度与太阳光度 $L_\odot$ 相同. 为了达到这个光度, 这个天体的最小可能质量是多少(以 $M_\odot$ 为单位)?

假设吸积球中的原子起源于远离致密天体的地方. 当这些原子落入致密天体时, 它们的引力能被转化为辐射.

(c) 用致密天体的质量( $M$ )、质量吸积率( $\dot{M} = \frac{\Delta M}{\Delta t}$ )和致密天体的半径( $R$ )推导出吸积光度( $L_{acc}$ )的表达式.

(d) 证明稳定状态下的最大可能吸积率并不直接取决于致密天体的质量.

(e) 对于一个 $R = 12 \times 10^9 \text{ m}$ 的天体, 计算最大可能的吸积率 $\dot{M}$ (以 $M_\odot/\text{年}$ 为单位).

在现实中, 吸积的几何形状是圆盘状的, 其中大多数粒子在一个几乎圆形的轨道上围绕着致密天体. 考虑一个由质量为 $M_1$ 的致密天体和质量为 $M_2$ 的氢气燃烧星组成的双星系统, 两者之间的距离为 $a$ . 来自烧氢星的气体被致密天体吸积, 由于这种质量转移, 双星系统的周期发生变化.

(f) 若要使得恒星之间的距离会不断增加, 找出两个质量的条件. 忽略恒星的自转.

## 11 戴森球

**卡尔达肖夫指数**根据获得和使用能量的标准, 将文明的演变分为三个阶段.

II型文明能够利用其自身恒星所辐射的所有能量. 目前, 我们是一个零型文明(我们甚至没有利用到达地球的100%的能量). 成为II型文明的方法之一是建造一个**戴森球**. 你可以把它想象成一个球体, 围绕太阳而建, 内表面覆盖有太阳能电池板.

我们假设使用现代太阳能电池板来建造这个球体. 首先, 让我们找出它应该建在离太阳多远的地方.

太阳能电池板背面的发射率为 $\epsilon = 0.8$ .

- (a) 太阳能电池板吸收并将大约 $k = 30\%$ 的入射辐射转化为内部热量. 求出半径为 $R$ 的戴森球的温度. 用 $k$ 、 $R$ 、 $\epsilon$ 和 $L_{\odot}$ (太阳光度)表示你的答案. 你可以把太阳看作是一个黑体. 忽略太阳能电池板的反射. 忽略任何可能的影响, 即能量没有转移到太阳能电池板的内部热量或变成电池板产生的电能.

假设现代太阳能电池板的最高运行温度约为 $T_{\max} \approx 104.5^\circ\text{C}$ . 在这之后, 效率会显著下降. 为了尽量减少材料的使用量, 我们应该考虑把球建得越小越好.

- (b) 为使面板正常工作, 计算球的半径. 地球是停留在球内部还是外部? 在答题纸上写上**IN**或**OUT**.
- (c) 如果现代太阳能电池板的最终输出功率约为入射能量的 $\eta = 20\%$ , 求这个戴森球所利用的功率.
- (d) 目前, 整个世界的平均用电量约为17太瓦(TW, 1 TW即 $10^{12}$  W). 如果这个戴森球收集一秒钟的能量, 可以满足我们多久的能源需求?
- (e) 在戴森球完全阻挡太阳光线的情况下, 地球上的温度将明显下降. 如果目前的平均温度约为 $15^\circ\text{C}$ , 请计算在这种情况下地球的平均温度的变化. 假设地球也是一个黑体.
- (f) 建造一个这么大的刚性球形物体几乎是不可能的. 另一种“建造”这个球体的方法是发送单独的太阳能电池板绕着太阳运行(在不同的倾斜轨道上), 半径为b部分中的 $R$ . 计算在该半径下围绕太阳运行的任何物体的周期 $T$ .
- (g) 假设每块太阳能电池板是一块薄薄的硅片, 其面密度 $\rho = 1\text{ kg/m}^2$ . 来自太阳的辐射压力, 可能会干扰到面板的轨道. 计算距离为 $R$ 的面板单位表面积的引力和光子力的比值 $\alpha$ , 你设所有的入射光都被吸收了. 这种辐射压力会有任何可测量的影响吗? 在答题纸上写下**YES**或**NO**.

现在假设戴森球是一个刚体, 以f部分中发现的周期旋转, 并具有b部分中发现的半径.

- (h) 对戴森球的一个主要威胁是轨道与球体表面交叉的小行星. 解决这个问题的方法之一是将面板从小行星的路径上移开. 显然, 小行星应该通过的洞的大小要比球体的半径小得多.

天文学家发现一颗小行星的轨道在黄道面上, 与戴森球的自转方向相同. 他们计算出这颗小行星将于8月14日进入球体, 9月20日离开球体. 计算球上两个孔之间的角距离, 以便为小行星提供一个安全通道.

这颗小行星在日心圆柱坐标系中的轨迹可以描述为

$$r = \frac{a}{1 - \cos \theta}$$

其中 $a = 1.00\text{ au}$ .

- (i) 如果一个II型文明在一个遥远的星系中创造的戴森球与地球的距离是 $d$ , 并且该球可以在温度 $T_1$ 和 $T_2$ 之间运行( $T_1 < T_2$ ), 我们应该在什么波长范围内寻找该戴森球. 假设只有非相对论的影响.

## 12 共轨卫星

这个问题应用了Dermott和Murray在1981年开发的一种确定两颗近似同轨卫星质量的方法.

假设质量为 $m_1$ 和 $m_2$ 的两颗小卫星围绕质量为 $M$ 的大中心天体近似共轨(在非常相似的轨道上运动),  $m_1, m_2 \ll M$ . 在任意瞬间, 卫星的轨道可近似为半径分别为 $r_1$ 和 $r_2$ 的开普勒圆形轨道, 尽管 $r_1$ 和 $r_2$ 会由于卫星之间的相互引力作用而随时间的推移略有变化.

图4描述了以中心天体为中心的零角动量的旋转参考系中的轨道形状. 我们用 $\theta$ 表示角度 $\angle m_1 M m_2$ , 而 $R$ 、 $x_1$ 和 $x_2$ 表示卫星的平均轨道半径和径向偏差.

在整个问题中, 请在惯性参考系中写出所有答案.

**提示:** 对于 $\alpha x \ll 1$ , 有 $(1+x)^\alpha \approx 1 + \alpha x$

首先我们要确定 $\frac{m_1}{m_2}$ 的值.

- (a) 写出质量为 $m_i$ 的卫星在其圆形轨道半径为 $r_i$ 时的角动量 $L_i$ .
- (b) 卫星的总角动量 $L_1 + L_2$ 是守恒的. 令 $x_1, x_2 \ll R$ 为图4中所示的距离. 找出 $\frac{m_1}{m_2}$ 和 $\frac{x_1}{x_2}$ 的比例之间的简单关系.

现在, 我们将尝试确定 $m_1 + m_2$ 的值. 对于接下来的部分, 我们将使用系统的实际质心, 它可能不完全在行星的中心.

- (c) 卫星 $m_1$ 和 $m_2$ 各自的角动量将由于它们的引力相互作用而随时间变化. 证明第二颗卫星的角动量的变化率为

$$\frac{\Delta L_2}{\Delta t} \approx -\frac{Gm_1m_2}{R} h(\theta) \quad \text{其中 } h(\theta) = \left[ \frac{\cos(\frac{\theta}{2})}{4 \sin^2(\frac{\theta}{2})} - \sin \theta \right]$$

- (d) 证明 $s = r_2 - r_1$ 满足

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} \approx -2\sqrt{\frac{G}{MR}}(m_1 + m_2)h(\theta)$$

- (e) 对于图4所示的角度 $\theta = \angle m_1 M m_2$ , 求 $\frac{\Delta \theta}{\Delta t}$ 的表达式

- (f) 利用上述结果, 找出 $\Delta s$ 和 $\Delta \theta$ 之间的关系.

- (g) 对上面的表达式进行积分后, 我们将得到结果,

$$\bar{x}^2 \approx \frac{4R^2}{3} \frac{m_1 + m_2}{M} \left( \frac{1}{\sin(\frac{\theta_{\min}}{2})} - 2 \cos \theta_{\min} - 3 \right)$$

$$\text{其中 } \bar{x} = \frac{x_1 + x_2}{2}.$$

Epimetheus( $m_1$ )和Janus( $m_2$ )是土星的两个近似同轨的卫星. 旅行者1号和卡西尼号航天器对它们的轨道进行了详细观测, 发现 $R = 150\,000$  km,  $x_1 = 76$  km,  $x_2 = 21$  km. Janus和Epimetheus之间的最小距离是13000 km. 已知土星的质量为 $5.7 \times 10^{26}$  kg. 估计一下Epimetheus和Janus的质量.

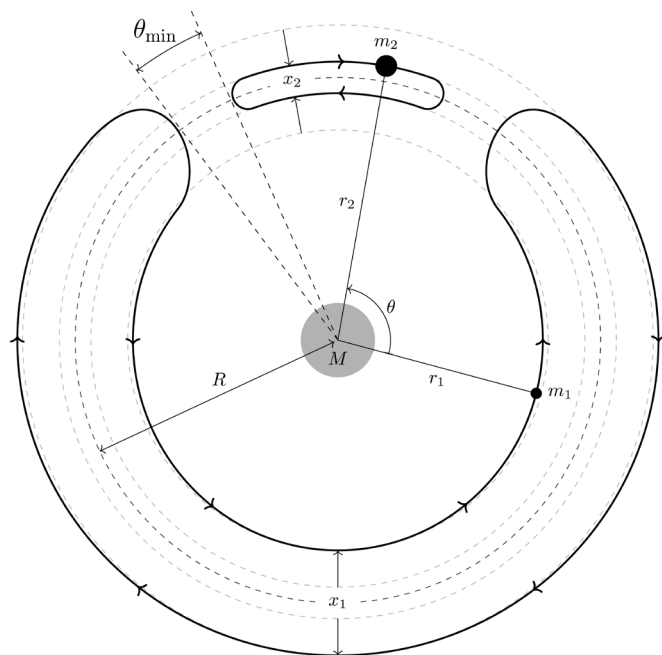


图4: 该图示意性地描述了旋转参考系中的轨道形状, 选择该系时, 两个卫星的总角动量为零.

### 13 相对论性射束

考虑一个频率为 $\hbar$ 的各向同性的光源, 其参考系是固定在光源上的(即静止参考系). 在这个静止参考系内, 考虑从光源发出的一条光线与 $X$ 轴成角度 $\theta_R$ . 光源以实验室参考系内测量的(相对论性)速度 $v$ 沿 $X$ 轴正方向运动.

- (a) 求出这条射线在实验室系内的频率 $\hbar_L$ , 以及这条射线在实验室系内与 $X$ 轴所成角度的余弦的表达式.

**提示:** 在相对论力学中, 粒子在静止和实验系之间的能量 $E$ 和动量 $p$ 以下列方式相关:

$$\begin{aligned}\frac{E_L}{c} &= \gamma \left( \frac{E_R}{c} + p_{x_R} \frac{v}{c} \right) \\ p_{x_L} &= \gamma \left( p_{x_R} + \frac{E_R v}{c^2} \right) \\ p_{y_L} &= p_{y_R} \\ p_{z_L} &= p_{z_R}\end{aligned}$$

其中:

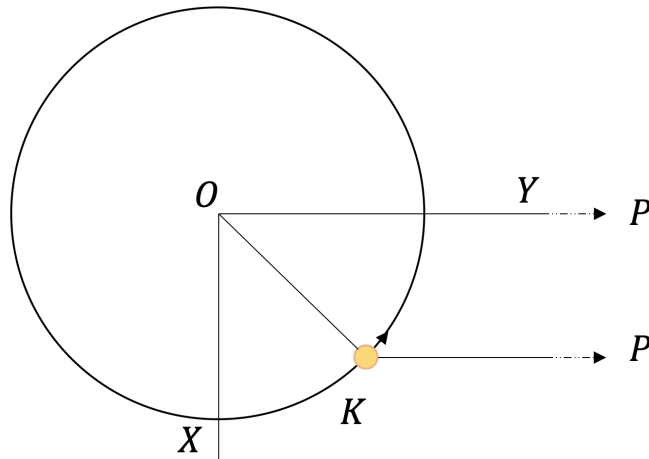
$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

- (b) 对于以下情况:

- i)  $\theta_R = 0^\circ$
- ii)  $\theta_R = \cos^{-1}(-v/c)$
- iii)  $\theta_R = 90^\circ$
- iv)  $\theta_L = 180^\circ$

在静止系的 $XY$ 平面和实验室系的 $X'Y'$ 平面分别画出光束的方向矢量.

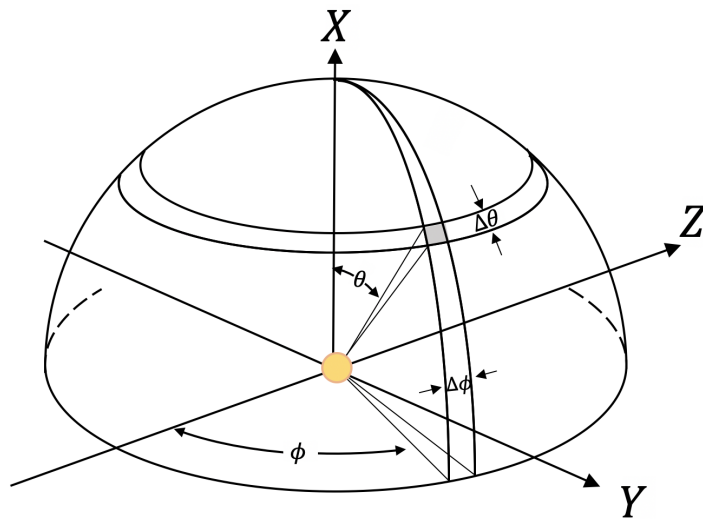
在黑洞周围的吸积盘中，带电粒子以相对论速度运行，在它们的静止系中可以被视为各向同性的光点源。考虑这样一个粒子 $K$ 在半径为 $r$ 、角速度为 $\omega$ 的圆形轨道上围绕位于 $O$ 的中心天体运行(见图)。



让我们假设，我们的实验室系对位于 $OY$ 轴上某一点 $P$ 的观测者来说是固定的，该点相对于 $O$ 来说是静止的。 $OP = R \gg r$ 。令 $t_{L_0} = t_{R_0} = 0$ 对应于看到 $K$ 穿过 $OX$ 轴的时刻。当 $K$ 以相对论速度运动，观测者在源 $K$ 的静止系内测得的持续时间 $\Delta t_R$ 与在 $P$ 处的实验室系内测得的持续时间 $\Delta t_L$ 相关，表达式为 $\Delta t_L = \gamma \Delta t_R$ 。

(c) 推导出 $t_L$ 关于 $t_R$ 的函数表达式( $t_L > R/c$ )?

让我们考虑从源头发出的的一部分光，在一个无限小的立体角 $\Delta\Omega_R = -\Delta(\cos \theta_R) \cdot \Delta\phi$ 的方向上，相对于静止系中的 $X$ 轴成一个角度 $\theta_R$ ，如下图所示。



(d) 证明，在实验室系内测量时

$$\Delta\Omega_L = \frac{\Delta\Omega_R}{\gamma^2 \left(1 + \frac{v}{c} \cos \theta_R\right)^2}$$

(e) 如果光源的本征亮度为 $L$ ，那么在 $t_L$  ( $t_L > R/c$ )时刻，观测者在 $P$ 点观察到的能量通量 $F_L$ 是多少?



**提示:** 在光源的静止系中, 你可以假设在时间间隔 $\Delta t_R$ 内, 有 $N_R$ 个光子被引导到立体角 $\Delta\Omega_R$ 内.

- (f) 从M87星系中心的超大质量黑洞射出的相对论光束中的带电粒子, 其速度高达 $0.95c$ . 对于来自M87的相对论光束, 其能量通量的最大和最小放大系数将是多少?