

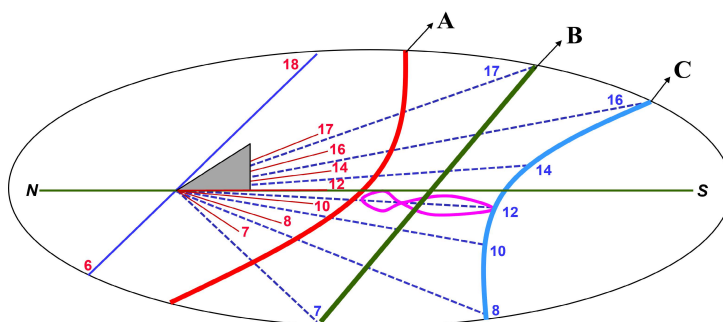
# 第十七届国际天文与天体物理奥林匹克竞赛

## 理论试题

巴西·里约热内卢 2024 年 8 月 20 日

### T1. 日晷 (10 分)

下图表示一个日晷，其中称为日晷针的三角形会在周围的表面上投下阴影，该表面有标记和数字表示重要的信息。已知这个日晷位于北回归线和北极圈之间，或者南回归线和南极圈之间。



在上图中，任意给定时间的虚线和实线之间的夹角总是等于日晷显示的时间与民用时间（即你手表显示的时间）之间的经度差。例如，对应 7 h 的虚线和实线形成的角度等于该日晷所在位置与时区中央经线之间的经度差。

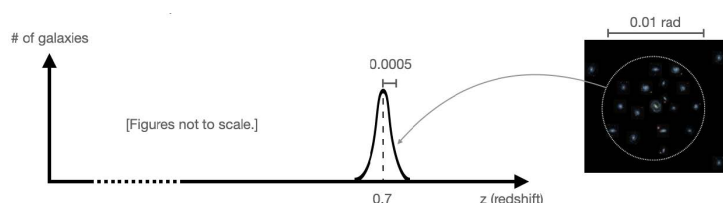
全年的日晷针尖影子总是位于曲线 A 和 C 之间。

阅读以下陈述并指出它们是正确还是错误。对于每个项目，如果你认为陈述正确，在答题纸上写 T，如果认为陈述错误，写 F。不需要解释你的答案。

- (a) 这个日晷只有位于南半球时才能正常工作。
- (b) 曲线 A 表示日晷所在半球冬至时表杆顶端影子的轨迹。
- (c) 曲线 B 表示春分时日晷影子尖端的轨迹。
- (d) 实心的径向线提供了当地的平均太阳时。
- (e) 日行迹围绕虚线对应 12h 显示了全年来时区中央子午线在真太阳正午时日晷影子尖端的位置。

### T2. 星系团 (10 分)

一项天体物理巡天绘制了天空中一个小区域的所有星系，该区域的角直径  $\Delta\theta = 0.01$  rad，其中许多星系似乎集中在图像的中心区域。当测量这个星系团中所有星系的位置和红移时，出现了一个有趣的分布，如下图所示。



利用这些观测结果，估计星系团的总质量，并以太阳质量为单位表示答案。假设这个星系团处于动力学平衡状态，其红移的均方根散度  $\sigma_z = \sqrt{\langle (z - 0.7)^2 \rangle} = 0.0005$ 。在考虑星系的平均速度、质量和空间分布时，可以做出合理的近似。

考虑在标准宇宙学模型中，到  $\bar{z} = 0.7$  的距离为  $D_A = 1500 \text{ Mpc}$ 。忽略宇宙学效应对距离的影响。

### T3. 小行星 (10 分)

一个奇特的小行星质量为  $m$ ，在一颗质量为  $M$  的恒星距离  $d$  处被发现。观测时小行星的速度大小为  $v = \sqrt{\frac{GM}{d}}$ ，其中  $G$  是万有引力常数。距离  $d$  远大于恒星的半径。

对于以下两个小问，用  $M$ 、 $d$  以及物理或数学常数来表达你的答案。

- (a) (8 分) 如果小行星最初正朝着恒星运动，它需要多长时间才能与恒星碰撞？
- (b) (2 分) 如果小行星最初以完全远离恒星的方向运动，那么它现在需要多长时间才能与恒星相撞？

### T4. 白矮星 (10 分)

白矮星的结构是由简并电子的压力所支撑，以抵抗引力坍缩，这一现象由量子物理解释，并与电子的泡利不相容原理相关。由非相对论简并电子组成的气体的状态方程如下：

$$P = \left(\frac{3}{8\pi}\right)^{2/3} \frac{h^2}{5m_e} n_e^{5/3}$$

其中， $n_e$  是单位体积内的电子数，可通过无量纲因子  $\mu_e$ （即每个电子对应的核子数，包括质子和中子）用质量密度  $\rho$  表示。同时，中心压强也可由该状态方程描述。

在流体静力平衡条件下，恒星中心任何距离  $r$  处的压力和引力相互平衡。这一条件可以表示为：

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{GM(r)\rho(r)}{r^2}$$

其中  $M(r)$  是半径为  $r$  的球体内包含的质量， $P(r)$  是恒星在半径  $r$  处的压力， $\rho(r)$  是恒星在半径  $r$  处的质量密度。

假设  $m_p = m_n$ 。白矮星的密度大致是均匀的，在恒星表面处以下近似成立：

$$\left.\frac{dP}{dr}\right|_{r=R} \approx -\frac{P_c}{R}$$

其中  $P_c$  是恒星中心的压力， $R$  是恒星半径。

- (a) (6 分) 白矮星的质量  $M$  和半径  $R$  之间的关系可以表示为：

$$R = a \cdot M^b$$

找出指数  $b$  并确定系数  $a$ ，以物理常数和  $\mu_e$  表示。

- (b) (4 分) 利用前一部分中找到的关系，估计一个由完全电离的碳 ( $^{12}\text{C}$ ) 构成、质量为  $M = 1.0M_\odot$  的白矮星的半径。

## T5. CMB (10 分)

宇宙微波背景辐射 (CMB) 是在早期宇宙中发出的辐射. 它在合理范围内是均匀且各向同性的, 并且可以用黑体辐射谱很好地描述. 目前其辐射谱的峰值温度约为  $T_{\text{today}} \sim 3 \text{ K}$ , 这是由 COBE 卫星的 FIRAS 仪器测量得到的.

- (a) (3 分) CMB 谱在红外波长  $\lambda_{\text{IR}} \sim 0.1 \text{ mm}$  处达到峰值时的红移 ( $z$ ) 是多少?
- (b) (7 分) 假设一个空间平坦、物质占主导的宇宙, 对应于前一部分红移的宇宙年龄是多少?

## T6. 星团摄影 (20 分)

一位天文学家在无光污染的地方用 V 波段拍摄一个暗弱的天体目标. 所选目标是球状星团 Palomar 4, 其角直径为  $\theta = 72.0''$ , 在 V 波段的均匀表面亮度为  $m_V = 20.6 \text{ mag/arcsec}^2$ . 观测设备包括一台口径  $D = 305 \text{ mm}$ 、焦比  $f/5$  的反射式望远镜, 以及一个位于主焦点的 CCD, 其量子效率为  $\eta = 80\%$ , 像素为正方形, 尺寸  $\ell = 3.80 \mu\text{m}$ .

给定数据:

- V 波段中心波长:  $\lambda_V = 550 \text{ nm}$
- V 波段带宽:  $\Delta\lambda_V = 88.0 \text{ nm}$
- V 波段 0 等天体的光子通量:  $10000 \text{ 计数/nm/cm}^2/\text{s}$

- (a) (3 分) 计算观测设备的视场角 (传感器单位长度所投影的天空角度), 以弧分/毫米为单位.
- (b) (4 分) 估计星团图像在 CCD 上覆盖的像素数  $n_p$ .
- (c) (13 分) 以曝光时间为  $t = 15 \text{ 秒}$ , 天文学家获得信噪比  $S/N = 225$ . 计算观测地点的天空亮度, 已知 CCD 的读出噪声 (标准差) 为每像素 5 个计数, 暗噪声为每像素每分钟 6 个计数. 请以  $\text{mag/arcsec}^2$  为单位给出答案. 你可能需要使用:  $\sigma_{\text{RON}}^2 = n_p \cdot 1 \cdot \text{RON}^2$  和  $\sigma_{\text{DN}}^2 = n_p \cdot \text{DN} \cdot t$ .

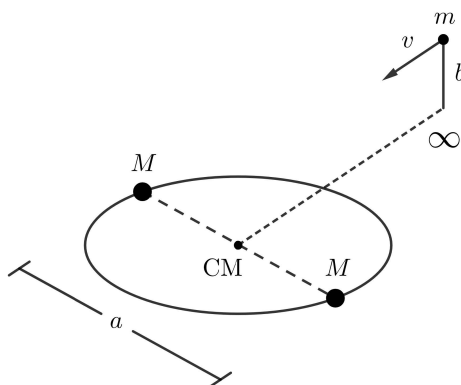
## T7. 流落者 (20 分)

在经历了一场海难并到达南半球的一个小岛后, 一名水手必须利用太阳来估计该岛的纬度. 然而, 由于视力不佳, 水手无法很好地看到夜空中的星星, 因此他最好的选择是依靠太阳. 他不知道具体日期, 但他意识到白天比夜晚长.

- (a) (7 分) 水手注意到, 在他到达岛上的第一天, 日出和日落在地平线上的位置之间的夹角是  $120^\circ$ . 有了这一信息, 确定该岛纬度的可能取值范围. 忽略太阳在黄道上的日常运动.
- (b) (13 分) 日出和日落的位置之间的角度每天都在增加. 40 天后, 这个角度为  $163^\circ$ . 估计该岛的纬度. 你可以忽略地球轨道的偏心率.

## T8. 双星硬化 (25 分)

考虑一个双黑洞系统, 两个黑洞质量相等均为  $M$ , 相距距离  $a$ , 并围绕它们的共同质心 (CM) 在圆形轨道上运行. 这个双黑洞系统在运动过程中与一个非常大且均匀的恒星场相互作用 (每个恒星的质量  $m \ll M$ ), 恒星场的数密度为  $n$ . 考虑一个恒星以速度  $v$  从无穷远处接近该系统, 在质心参考系中 (如图所示), 其与质心的最近距离为  $r_p$ . 对于任务 (a) 和 (c), 你应该利用以下事实:  $v^2 \ll \frac{GM}{a}$ .



- (a) (5 分) 推导出  $b$  的表达式, 用  $M$ 、 $a$ 、 $v$  和物理常数表示. 在这个任务中, 假设恒星与双星相互作用时, 其总质量保持在质心处不变.

在与双星系统进行复杂相互作用后, 恒星被弹射出系统. 其弹射速度的精确计算较为复杂, 但可以考虑当恒星接近系统时, 仅与双星中的一个成员星发生相互作用, 从而估算其速度. 因此, 在部分 (b) 中, 仅考虑恒星与双星中一个成员星之间的引力相互作用.

- (b) (6 分) 这颗恒星以相对于天体轨道速度可以忽略不计的初速度接近天体, 并且两者直接相向运动. 在与系统相互作用之后, 当这颗恒星再次远离黑洞时, 我们发现其速度矢量的方向被反转, 最终速度为  $u_f$ . 用  $M$ 、 $a$  和物理常数来确定  $u_f$ . 假设在相互作用过程中动量和机械能守恒, 并且相互作用时间尺度远小于双星系统的周期. 注意  $m \ll M$ .

对于以下任务, 假设所有以碰撞参数  $\frac{1}{2}b_0 \leq b \leq \frac{3}{2}b_0$  (其中  $b_0$  是一颗在无穷远处速度为  $v_0$  的恒星的碰撞参数) 接近系统的恒星都达到距离质心  $r_p \approx \frac{1}{2}a$  的最近接近距离. 同时, 假设所有恒星以 (b) 中找到的速度离开系统.

- (c) (14 分) 在每次相遇时, 双星系统的总能量的一部分转移到恒星的动能中. 假设双星轨道保持圆形. 已知这一情况, 利用你之前任务的结果, 并仅考虑在规定的碰撞参数范围内的恒星相遇, 证明双星系统分离距离的倒数以恒定速率增加:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{a} \right) = H \frac{G\rho}{v_0}$$

在这里,  $\rho = nm$  是恒星场的质量密度,  $G$  是万有引力常数. 求无量纲常数  $H$ , 它指的是硬化.

## T9. 吸积物理 (35 分)

物质向致密天体（如中子星和黑洞）的吸积是天体物理系统中产生辐射能最有效的方式之一。考虑一个质量为  $\Delta m$  的气体元，在一个静止且几何厚度很薄、最大半径为  $R_{\max}$ 、最小稳定轨道半径为  $R_{\min}$ （其中  $R_{\min}/R_{\max} \ll 1$ ）的物质盘中旋转，该盘围绕一个质量为  $M$ 、半径为  $R$  的致密天体。

- (a) (6 分) 假设盘中一个气体元遵循近似开普勒轨道的圆轨道，求该气体在从半径  $R_{\max}$  开始轨道运动直到达到轨道半径  $r \ll R_{\max}$  时，单位质量的总机械能  $\frac{\Delta E}{\Delta m}$  的表达式。这一过程发生得非常缓慢，通过粘滞耗散将动能转化为气体盘的内能。注意：忽略吸积盘内粒子之间的引力相互作用，最终答案用  $G$ 、 $M$  和  $r$  表示。
- (b) (5 分) 考虑到盘以平均速率  $\dot{M}$  获得质量，并假设所有机械能损失最终都转化为辐射，求盘的总光度表达式。
- (c) (8 分) 现在考虑由半径在  $r$  到  $r + \Delta r$  之间的所有质量元组成的环。在此情况下，求盘在该半径处的小宽度  $\Delta r$  内产生的光度表达式；即，求  $\frac{\Delta E}{\Delta t \Delta r}$  的表达式。
- (d) (10 分) 假设这个环中释放的引力能以黑体辐射的形式局部地由环的表面发射，求环的表面温度  $T$  的表达式。
- (e) (3 分) 假设中心天体是一个质量为  $3M_{\odot}$  的恒星级黑洞，其吸积率为  $\dot{M} = 10^{-9} M_{\odot}/\text{年}$ 。同时假设  $R_{\min} = 3R_{\text{sch}}$ ，其中  $R_{\text{sch}}$  是黑洞的史瓦西半径。确定盘的光度及其最内部分的发射峰值波长。忽略引力红移效应，并假设环的最内部分的发射主导了总发射。
- (f) (3 分) 现在，考虑另一个吸积系统，其吸积率为  $\dot{M} = 1M_{\odot}/\text{年}$ ，峰值发射波长为  $\lambda = 6 \times 10^{-8} \text{ m}$ ，估计这个黑洞的质量。

## T10. 食甚 (75 分)

食甚被定义为在日食过程中月球阴影锥的轴离地球中心最近的时刻。这个问题探讨了这一现象的几何特性，以 1919 年 5 月 29 日的日食为例，因为这次日食在历史上具有重要意义，是天文学家首次能够通过观测验证广义相对论的时候。其中一次科学远征是为了观测这次日食，在巴西的索布拉尔市举行。

以下两个表格显示了食甚时太阳和月亮的笛卡尔坐标和球面坐标。这些坐标的系统是右手法则的，原点位于地球中心，正  $x$  轴指向格林尼治子午线，正  $z$  轴指向北极。在本题的其余部分，将称其为**系统 I**。

球面坐标：

	太阳中心	月球中心
径向距离 ( $r$ )	$1.516 \times 10^{11} \text{ m}$	$3.589 \times 10^8 \text{ m}$
极角 ( $\theta$ )	$68^{\circ}29'44.1''$	$68^{\circ}47'41.6''$
方位角 ( $\varphi$ )	$-1^{\text{h}}11^{\text{m}}28.2^{\text{s}}$	$-1^{\text{h}}11^{\text{m}}22.9^{\text{s}}$

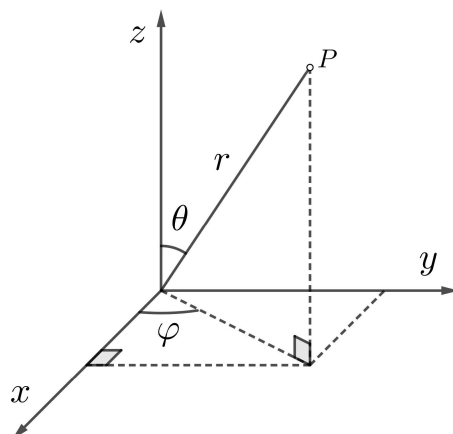
笛卡尔坐标：

	太阳中心	月球中心
$x$	$1.342 \times 10^{11} \text{ m}$	$3.185 \times 10^8 \text{ m}$
$y$	$-4.327 \times 10^{10} \text{ m}$	$-1.025 \times 10^8 \text{ m}$
$z$	$5.557 \times 10^{10} \text{ m}$	$1.298 \times 10^8 \text{ m}$

对于这个问题，假设地球是一个完美的球体。

**注意：**点  $P$  的球面坐标定义如下：

- 径向距离 ( $r$ ): 原点 ( $O$ ) 与  $P$  之间的距离 (范围:  $r \geq 0$ ).
- 极角 ( $\theta$ ): 正  $z$  轴与线段  $OP$  之间的角度 (范围:  $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ ).
- 方位角 ( $\varphi$ ): 正  $x$  轴与线段  $OP$  在  $xy$  平面上的投影之间的角度 (范围:  $-12^h \leq \varphi < 12^h$ ).



### 第一部分：地理坐标 (25 分)

- (a) (3 分) 确定在食甚时，地心观测者所见的太阳和月亮的赤纬。
- (b) (3 分) 确定在食甚时刻，对于地心观测者来说太阳和月亮的赤经。此时格林尼治的恒星时为  $5^h 32^m 35.5^s$ 。
- (c) (4 分) 找出一个单位向量，表示月球阴影锥的轴的方向。该向量应从月球指向地球中心附近。
- (d) (15 分) 确定食甚时月球阴影锥轴与地球表面相交的点的纬度和经度。

### 第二部分：全食持续时间 (50 分)

精确确定日食的全食持续时间涉及复杂的计算，超出了本问题的范围。然而，可以通过以下两个假设获得该值的合理近似：

- 全食时，在某一地点地表的本影大小在整个全食期间保持大致不变。
- 全食期间，在某一地点地面上的本影速度保持大致恒定。
- (e) (10 分) 估计食甚时本影的半径。为简化计算，假设本影足够小，可以近似认为是平面，并且月球阴影锥在食甚时非常接近地心。
- (f) (3 分) 计算地球在本影中心纬度的自转速度。
- (g) (4 分) 确定食甚时月亮的轨道速度。忽略月亮轨道半长轴的变化。

对于该问题的其余部分，假设月球的切向速度大致等于轨道速度，并忽略其径向分量。为了计算本影的速度，定义两个新的附加右手坐标系会很方便。系统 II 定义如下：

- 原点 ( $O_{II}$ ): 月球在食甚时刻的位置。
- 正  $x$  轴: 与赤纬圈相切。指向东。

- 正  $y$  轴：与赤经子午线相切。指向北。

**系统 III** 定义为如下：

- 原点 ( $O_{III}$ )：食甚瞬间本影的中心。
- 正  $x$  轴：与纬度圈相切。指向东。
- 正  $y$  轴：与经线相切。指向北。

请注意，在这两个系统中， $xy$  平面在 origin 位置与天球相切。

系统 III 与系统 II 相似，唯一的区别是原点 ( $O_{III}$ ) 位于食甚时本影的中心。

- (h) (14 分) 使用系统 II，确定食甚时月球的运动矢量。注意，与食位置更接近的天球赤道与月球轨道的交点的赤经为  $23^h07^m59.2^s$ 。
- (i) (10 分) 写出月球在系统 III 中的速度矢量。注意，在系统 I 中，原点  $O_{II}$  和  $O_{III}$  的位置的方位角差可以忽略，因此你只需考虑极角的差。
- (j) (6 分) 计算食甚时刻本影中心在地球表面的移动速度。
- (k) (3 分) 估计在 (d) 部分找到的坐标位置处日食的全食持续时间。

## T11. 地面轨迹 (75 分)

卫星轨道投影到地球表面称为其地面轨迹。在某一时刻，可以想象从地球中心向卫星画出一条径向线。这条径向线与地球球面的交点是地面轨迹上的一个点。

该点的位置由其地心纬度和经度确定。然后，地面轨迹基本上就是该点随着卫星绕地球运行而描绘出的轨迹。

### 第一部分：太阳同步轨道 (25 分)

特别有趣的是分析所谓的太阳同步轨道的地面轨迹。这是一种围绕行星的近极地轨道，卫星在不同日期以相同的平均地方太阳时间经过行星表面的任意一点。这一特性对于卫星成像尤其重要，确保了不同日期下相似的光照条件。

下图显示了太阳同步轨道卫星的地面轨迹。其倾角 ( $i$ ) —— 卫星轨道平面与地球赤道平面之间的夹角 —— 位于  $90^\circ < i < 180^\circ$  范围内。该图描绘了卫星完成的五条完整轨道。

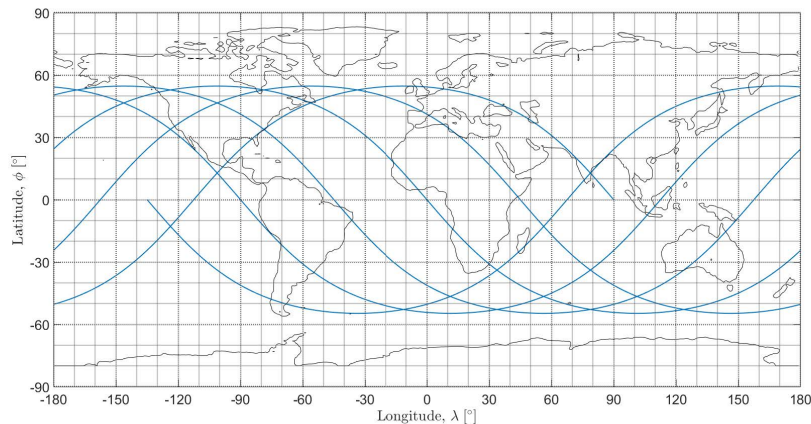


图 1: 卫星五个轨道周期的地面轨迹

对于第一部分中的问题，假设地球绕太阳的轨道是圆形的。

- (a) (3 分) 确定轨道的节点进动率, 单位为 rad/s.
- (b) (8 分) 基于图 1 中显示的地面轨迹, 确定卫星轨道的倾角 (以度为单位) 并估算其轨道周期 (以分钟为单位). 考虑卫星的轨道周期短于一个恒星日.
- (c) (2 分) 计算轨道的半长轴  $a$ , 单位为公里.
- (d) (1 分) 确定卫星返回地球同一位置时完成的轨道数量.
- (e) (11 分) 如图 1 所示, 地面轨迹经过巴西城市马塞约  $(\phi, \lambda) = (9.7^\circ\text{S}; 35.7^\circ\text{W})$  以及波兰的乔尔佐  $(\phi, \lambda) = (50.3^\circ\text{N}; 19.0^\circ\text{E})$ . 已知地面轨迹在中午 (当地时间) 经过马塞约, 确定卫星轨迹经过乔尔佐时的当地时间. 提示: 对于本任务, 您可以忽略节点进动的影响.

## 第二部分: 冻原轨道 (50 分)

冻原轨道是一种高倾角的地球同步椭圆轨道. 远地点位于特定的地理区域上, 使得卫星能够对该区域进行长时间的可见性和覆盖. 这种轨道确保卫星在大部分轨道周期内位于北半球或南半球上空, 使其特别适用于高纬度地区的通信和气象观测.

下方的图像表示一颗卫星在极地轨道上的地面轨迹, 其近地点幅角等于  $270^\circ$ . 该卫星的轨道与地球自转方向相同. 对于以下项目, 您可以忽略地球扁率的影响.

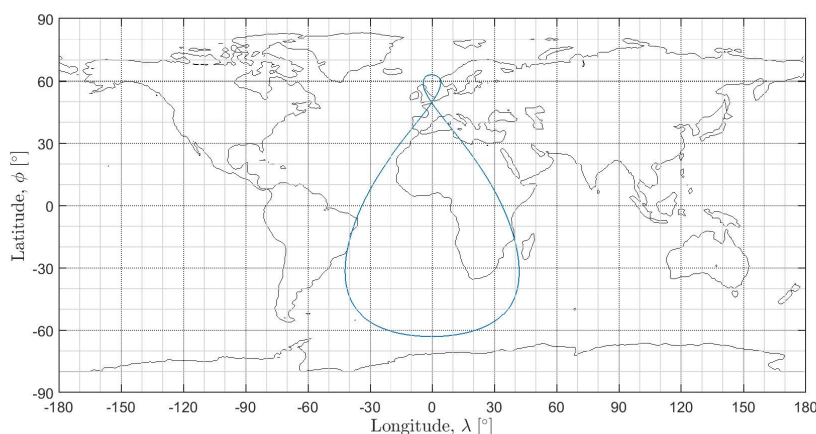


图 2: 苔原轨道卫星一个轨道周期的地面轨迹

- (f) (4 分) 根据上面的图, 给出卫星轨道的倾角  $i$  (以度为单位)、轨道周期  $T$  (以分钟为单位) 和半长轴  $a$  (以公里为单位).
- (g) (12 分) 证明卫星在北半球停留的时间由以下公式给出:

$$T' = \left( \frac{1}{2} + \frac{\sin^{-1} e}{\pi} + \frac{e}{\pi} \cdot \sqrt{1 - e^2} \right) \cdot T,$$

其中  $e$  是轨道的偏心率,  $T$  是其轨道周期.

- (h) (10 分) 数值估计其轨道的偏心率  $e$ . 你可以认为偏心率非常小, 因此  $\sin(e) \approx e$  且  $e^2 \ll 1$ .
- (i) (18 分) 从地面轨迹来看, 我们可以观察到卫星在其北半球和南半球轨迹中均表现出逆行运动. 找出卫星在南半球轨迹中逆行运动开始和结束时的真近点角 (以度为单位).



- j)** (6 分) 还可以注意到, 一个极地轨道的地面轨迹形状是“8”字形, 类似于日晷线, 因此卫星在一次轨道运行中会经过地球上的同一点. 计算这种特性停止出现时轨道需要的最小偏心率. 使用与图 2 中轨道相同的轨道倾角.