

# 第十八届国际天文与天体物理奥林匹克竞赛

## 数据分析试题

印度·孟买 2025 年 8 月 17 日

### 1. 系外行星 30 年

[90 分]

这个问题探讨了系外行星探测的两种主要方法的一些方面：径向速度法和凌日法。在整个问题中，我们将考虑一个特定的系统，该系统包含一颗绕太阳型恒星（S）运行的单行星（P），其轨道为圆形，半径为  $a$ 。我们将把这个系统称为“SP 系统”。

#### 恒星参数

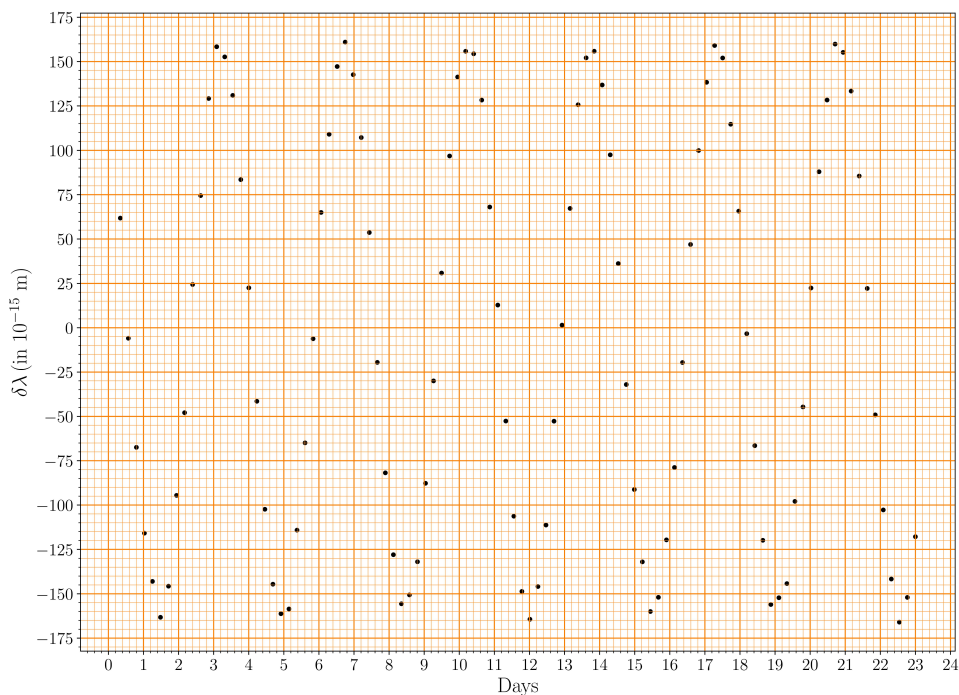
- (1) 恒星 S 的 V 波段视星等为  $(7.65 \pm 0.03)$  等，视差为  $(20.67 \pm 0.05)$  毫角秒，热改正（BC）为  $-0.0650$  等。因此，这颗恒星的全波段光度高于其在 V 波段的光度。

估计恒星的质量  $M_s$ （以  $M_\odot$  为单位），假设质量-光度（ $M-L$ ）关系为  $L \propto M^4$ 。同时估计  $M_s$  的不确定性。你可能需要使用  $\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}$ 。 [8]

#### 径向速度法

径向速度法利用已知光谱线的观测波长  $\lambda_{\text{obs}}$  与静止波长  $\lambda_0$  之间的多普勒位移  $\delta\lambda \equiv \lambda_{\text{obs}} - \lambda_0$  来探测系外行星并确定其特性。

下图显示了 SP 系统中观测到的 Fe I 线（ $\lambda_0 = 543.45 \times 10^{-9} \text{ m}$ ）的  $\delta\lambda$  随时间的变化情况。



径向速度半幅  $K$  定义为  $K \equiv (v_{r, \text{max}} - v_{r, \text{min}})/2$ ，其中  $v_{r, \text{max}}$  和  $v_{r, \text{min}}$  分别表示径向速度的最大值和最小值。对于一个圆形行星轨道，半幅  $K$  可以表示为：

$$K = \left( \frac{2\pi G}{T} \right)^{1/3} \frac{M_p \sin i}{(M_p + M_s)^{2/3}},$$

其中  $T$  是周期,  $i$  是行星轨道的倾角 (行星轨道平面法线与观测者视线之间的夹角),  $M_p$  和  $M_s$  分别是行星和恒星的质量.

(2) 使用总结答题纸中的图表来回答以下问题.

(2a) 绘制与图中所示观测数据相关的平滑曲线. [2]

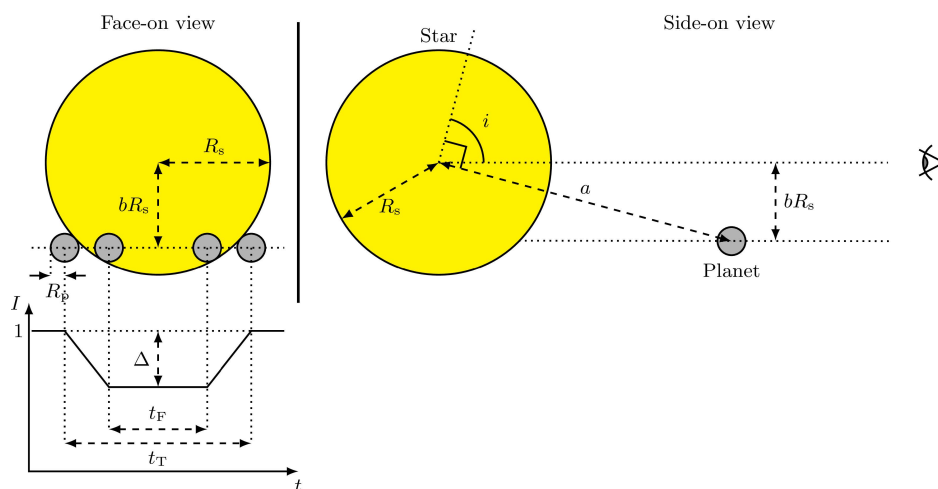
(2b) 在你绘制的曲线上选择适当的点, 并使用合适的方法确定  $T$  和  $K$  及其相应的不确定度. 所有用于计算  $T$  和  $K$  的数据点必须在总结答题纸的表格中显示. 使用表格的其余部分展示所需的中间计算, 并添加适当的标题. [11]

(2c) 找出行星的最小质量  $M_{p, \min}$  (以  $M_\odot$  为单位) 及其相应的不确定度, 假设  $M_p \ll M_s$ . [5]

(2d) 使用 (2c) 中估计的  $M_{p, \min}$  值, 计算行星轨道的半长轴最小值  $a_{\min}$  及其不确定度, 单位为 AU. [4]

### 凌日法 (无周边昏暗)

下面显示了一个行星凌日的示意图 (未按比例). 最初, 我们将假设恒星盘具有均匀的平均强度, 并且恒星本身存在一些固有的噪声.



归一化强度  $I$  随时间  $t$  变化的光变曲线如上图的凌日示意图所示. 将凌日之外的恒星强度取为 1. 归一化光变曲线中强度的最大下降量由  $\Delta$  表示. 对于一个均匀发光的恒星盘, 行星半径  $R_p$  与  $\Delta$  的关系为

$$\left(\frac{R_p}{R_s}\right)^2 = \Delta,$$

其中  $R_s$  是恒星的半径.

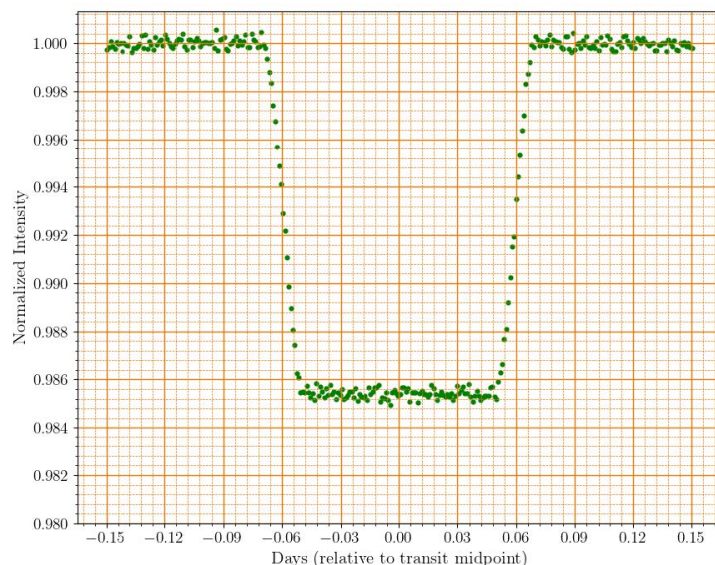
凌星的总持续时间 (行星部分或全部遮挡恒星盘) 由  $t_T$  表示, 而  $t_F$  表示当行星完全位于恒星盘前方时的持续时间. “碰撞参数”  $b$  是在凌星中点时, 行星与恒星盘中心之间的投影距离, 以恒星半径  $R_s$  为单位.

对于一个接近边沿视方向的恒星-行星轨道，碰撞参数由以下公式给出

$$b = \left[ \frac{\left(1 - \sqrt{\Delta}\right)^2 - (t_F/t_T)^2 \left(1 + \sqrt{\Delta}\right)^2}{1 - (t_F/t_T)^2} \right]^{1/2}.$$

- (3) 对于 SP 系统，恒星半径已知为  $R_s = 1.20R_\odot$ ，并且行星的凌日现象确实可观测。使用在 (2d) 中估计的最小轨道半径  $a_{\min}$ ，求出倾角的最小值  $i_{\min}$ 。 [3]

假设恒星盘亮度均匀，凌日光变曲线将如下面所示。



- (4) 使用给定的光变曲线回答以下问题。为供参考，上述光变曲线也包含在总结答题纸中。

(4a) 通过在图上标记适当的读数来估算  $t_T$  和  $t_F$  的值（以天为单位）。 [3]

(4b) 估计  $\Delta$  的平均值，通过在图上标记适当的读数，从而找到  $R_p$  的单位为  $R_\odot$  的值。 [2]

(4c) 确定  $i$  的值（以度为单位），假设轨道半径为  $a_{\min}$ 。 [2]

### 引入周边昏暗

到目前为止，我们假设恒星盘是均匀发光的。实际上，由于“周边昏暗”——这是一种光学效应，恒星盘的中心部分比边缘部分更明亮——所观察到的恒星盘亮度并不均匀。

周边昏暗效应可以通过相对强度  $J(\theta) \equiv \frac{I(\theta)}{I(0)}$  来测量，其中  $\theta$  是星体表面某点的法线与观测者到该点连线之间的夹角， $I(\theta)$  是该点观测到的星体盘面的强度（ $I(0)$  为星体盘面中心的强度）。对于远处的观测者， $\theta$  从  $\theta = 0$ （盘面中心）变化到  $\theta \approx 90^\circ$ （盘面边缘）。

- (5) 下表给出了太阳在某一波长处的  $J(\theta)$  测量值。我们将假设恒星 S 具有相同的周边昏暗曲线。

$\theta$	$J(\theta)$	$\theta$	$J(\theta)$	$\theta$	$J(\theta)$	$\theta$	$J(\theta)$
$0^\circ$	1.000	$20^\circ$	0.971	$40^\circ$	0.883	$70^\circ$	0.595
$10^\circ$	0.994	$25^\circ$	0.950	$50^\circ$	0.794	$80^\circ$	0.475
$15^\circ$	0.984	$30^\circ$	0.943	$60^\circ$	0.724	$90^\circ$	0.312

周边昏暗曲线可以用一个二次公式来建模：

$$J(\theta) = 1 - a_1(1 - \cos \theta) - a_2(1 - \cos \theta)^2,$$

其中  $a_1$  和  $a_2$  是两个常数.

我们将从给定的数据中通过使用合适的变量作图来估计未知系数  $a_1$  和  $a_2$ .

(5a) 选择一对变量  $(x_1, y_1)$ ，它们是  $\theta$  和  $J$  的合适函数，分别用于沿  $x$  轴和  $y$  轴绘制，以确定  $a_1$  和  $a_2$ . 写出  $x_1$  和  $y_1$  的表达式. [2]

如果你需要为其他图表定义额外的变量，请将它们定义为  $(x_2, y_2)$  等.

(5b) 列出你图表所需的数值. [4]

(5c) 在给定的坐标纸上绘制新定义的变量（将你的图表标记为 “(5c)”）. [7]

(5d) 从图中获取  $a_1$  和  $a_2$ . 不需要考虑数值的误差. [7]

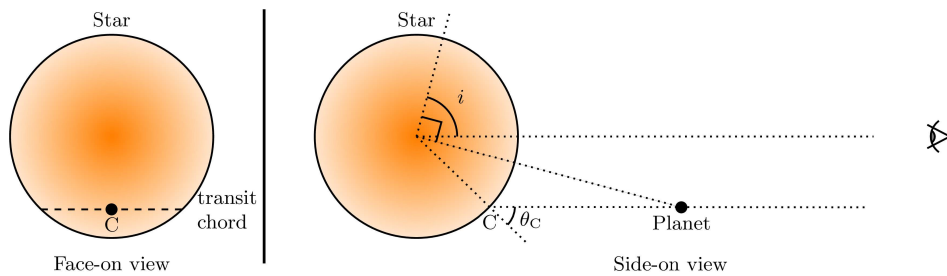
### 存在周边昏暗的凌日

现在，我们考虑行星穿越一个边缘变暗的恒星盘. 在存在周边昏暗的情况下，我们将通过上述的  $J(\theta)$  二次公式进行建模，整个恒星盘（没有发生任何凌日）的平均观测到的光度  $\langle I \rangle$  为：

$$\langle I \rangle = \left(1 - \frac{a_1}{3} - \frac{a_2}{6}\right) I(0).$$

此外，由于行星凌日造成的光度下降不仅取决于行星和恒星的相对大小  $\left(\frac{R_p}{R_s}\right)$ ，还取决于恒星盘在凌日轨道弦上的强度分布，而这种强度分布又取决于轨道倾角  $i$ .

下图（比例不准确）显示了构型情况. 请注意，恒星较亮的部分显示为较暗的色调，而行星则显示为一个黑点.



此处  $\frac{R_p}{R_s}$  与从光变曲线测得的  $\Delta$  之间的关系是

$$\Delta = \frac{I(\theta_C)}{\langle I \rangle} \left( \frac{R_p}{R_s} \right)^2,$$

其中  $I(\theta_C)$  是恒星盘在凌日弦线中点（图中点 C）的强度， $\theta_C$  为该点视线方向与表面法线之间的夹角. 从上面可以看出，对于某一特定恒星，相同的  $\Delta$  值可以通过行星半径  $R_p$  和倾角  $i$  的多种组合产生.

(6) 可以通过来自两个波长（例如， $\lambda_B$ （蓝光）和  $\lambda_R$ （红光））的凌日光变曲线数据唯一地确定  $R_p$  和  $i$ . 这两个波长的周边昏暗系数如下：

波长	$a_1$	$a_2$
$\lambda_B$	0.82	0.05
$\lambda_R$	0.24	0.20

(6a) 在以下选项中选择正确描述  $\lambda_B$  的凌日最大深度 ( $\Delta$ ) 与轨道倾角 ( $i$ ) 关系的陈述, 并在总结答案纸上打勾 (✓). [2]

(A)  $\Delta$  随着  $i$  减小而增加.

(B)  $\Delta$  随着  $i$  减小而减小.

(C)  $\Delta$  与  $i$  无关.

(6b) “SP 系统” 的凌日深度 ( $\Delta$ ) 分别在  $\lambda_B$  和  $\lambda_R$  波段测得为 0.0182 和 0.0159.

在给定的网格上绘制  $\lambda_B$  和  $\lambda_R$  的示意凌日光变曲线, 并分别用 “B” 和 “R” 标记这些曲线. 假设两种波长的总凌日持续时间相同. 曲线不需要按比例绘制, 但应正确表示光变曲线的形状. [4]

(7) 我们将采用图形方法, 通过在  $\lambda_B$  和  $\lambda_R$  处测量  $\Delta$  来确定 SP 系统中的  $R_p$  和  $i$  值.

(7a) 写出一个适当的表达式, 关联要绘制的相关变量. (提示: 你可以考虑  $i$ 、 $R_p$  和  $R_s$  等相关的变量.) [6]

(7b) 列出要绘制的适当量的数据. [5]

(7c) 绘制一个合适的图表并标记为 “(7c)”. [7]

(7d) 从图中估计  $R_p$  (单位为  $R_\odot$ ) 和  $i$  (单位为度) 的值. [4]

(8) 根据本题获得的结果, 在总结答题卡上勾选 (✓) 适当的框, 以表明行星 P 是 “岩石型” 还是 “气体型”. [2]

## 2. 预测日冕物质抛射到达地球的时间 [60 分]

太阳偶尔会释放出磁化等离子体, 称为日冕物质喷射 (CME), 这些物质来源于太阳表面并向外传播. 准确预测它们到达地球的时间对于理解并减轻它们对地球轨道卫星的潜在影响至关重要. 在这个问题中, 我们旨在通过建立一个经验模型, 利用 10 个 CME 的数据来预测它们的到达时间. 在整个问题中, 假设太阳表面到地球的距离为  $214R_\odot$ . 此外, 假设太阳能保持静止. 由于电磁力、引力和阻力, CME 在传播过程中经历可变的加速度. 在这个问题的前两个部分中, 我们假设太阳和地球之间的区域是真空.

### 通过真空的 CME

(1) 10 次 CME 的初始速度  $u$  (在太阳表面, 即  $1R_\odot$  处)、到达地球时的最终速度  $v$ , 以及离开太阳表面后到达地球所需的时间 (以小时为单位)  $\tau$ , 如下表所示.

CME 名称	$u$ (km s <sup>-1</sup> )	$v$ (km s <sup>-1</sup> )	$\tau$ (h)
CME-A	804	470	74.5
CME-B	247	360	127.5
CME-C	523	396	103.5
CME-D	830	415	71.0
CME-E	665	400	104.5
CME-F	347	350	101.5
CME-G	446	375	99.5
CME-H	155	360	97.0
CME-I	1016	515	67.0
CME-J	683	410	54.0

(1a) 计算每个 CME 的平均加速度  $a$ ，单位为 m s<sup>-2</sup>. [3]

(1b) 我们假设一个经验模型来描述 CME 的加速度  $a_{\text{model}}$ ，它依赖于其初始速度  $u$ ，表达式为  $a_{\text{model}} = m\left(\frac{u}{u_0}\right) + \alpha$ ，其中， $a_{\text{model}}$  的单位是 m s<sup>-2</sup>， $u$  的单位是 km s<sup>-1</sup>， $u_0 = 1.00 \times 10^3$  km s<sup>-1</sup>.

用适当的图确定常数  $m$  和  $\alpha$  及其相关不确定度（将你的图标记为“（1b）”）。[15]

(1c) 对于每个 CME，列出加速度的模型值  $a_{\text{model}}$ （单位为 m s<sup>-2</sup>）。然后计算计算出的加速度  $a$  与模型值  $a_{\text{model}}$  之间的均方根（rms）偏差  $\delta a_{\text{rms}}$ . [4]

(2) 我们考虑另外两个 CME：CME-1 和 CME-2，它们的初始速度分别为  $u = 1044$  km s<sup>-1</sup> 和  $273$  km s<sup>-1</sup>.

(2a) 使用在（1b）中获得的经验模型，计算 CME-1 和 CME-2 分别到达地球的预测到达时间  $\tau_{1,m}$  和  $\tau_{2,m}$ （以小时为单位）。[4]

(2b) 观测到的 CME-1 和 CME-2 到达地球的时间分别为 46.0 小时和 74.5 小时。如果某个 CME 的预测到达时间与其观测到达时间的偏差在 20% 以内，则认为该经验模型对该 CME 是有效的；否则，该模型无效。在总结答题纸上，通过勾选（✓）相应的方框来表明每个 CME 模型的有效性。[2]

### 太阳风存在下的 CME

实际上，太阳和地球之间的空间充满了太阳风，它会对 CME 产生阻力。这种阻力会根据 CME 相对于太阳风的速度而使 CME 减速或加速。为了考虑太阳风的影响，我们将在  $R_{\text{obs}}(t) \geq R_0$  的距离范围内使用一个“仅阻力”模型，其中  $R_0$  是阻力成为影响 CME 运动的主要力量的距离。

该 CME 在“仅阻力”模型中的距离  $R_D(t)$  和速度  $V_D(t)$  由以下公式给出：

$$R_D(t) = \frac{S}{\gamma} \ln[1 + S\gamma(V_0 - V_s)(t - t_0)] + V_s(t - t_0) + R_0,$$

$$V_D(t) = \frac{V_0 - V_s}{1 + S\gamma(V_0 - V_s)(t - t_0)} + V_s,$$

其中， $\gamma = 2 \times 10^{-8}$  km<sup>-1</sup>， $V_s$  是太阳风的恒定速度， $R_0$  和  $V_0$  分别是时间  $t_0$  的距离和速度， $S$  是符号因子。若  $V_0 > V_s$ ，则  $S = 1$ ；若  $V_0 \leq V_s$ ，则  $S = -1$ 。

- (3) 下表显示了两个 CME (CME-3 和 CME-4) 在不同时间  $t$  (以小时为单位) 的观测径向距离  $R_{\text{obs}}(t)$  (以  $R_{\odot}$  为单位) 从太阳表面开始的数值. 每个表中的最后一个数据点 (分别对 D5 和 P8) 代表相应的 CME 到达地球的时间. 对于本部分, 假设  $V_s = 330 \text{ km s}^{-1}$ .

CME-3			CME-4		
数据点	$t$ (h)	$R_{\text{obs}}(t) (R_{\odot})$	数据点	$t$ (h)	$R_{\text{obs}}(t) (R_{\odot})$
D1	0.200	6.36	P1	1.00	4.00
D2	0.480	7.99	P2	3.00	6.00
D3	1.22	11.99	P3	4.00	9.00
D4	1.49	13.51	P4	5.00	11.00
D5	58.05	214	P5	21.0	43.0
			P6	50.0	100
			P7	85.0	170
			P8	111	214

我们将评估“仅阻力”模型是否能够满意地预测这些 CME 的到达时间. 使用该模型需要适当选择  $t_0$ , 并相应确定  $R_0$  和  $V_0$ .

- (3a) 对于 CME-3, 采用以下两个案例:

(C1)  $t_0$  被取为区间 D1 – D2 的中点;

(C2)  $t_0$  被取为区间 D3 – D4 的中点;

假设速度在每一特定区间 D1 – D2 和 D3 – D4 内保持恒定, 但两个区间之间可能不同.

使用  $t_0$ ,  $R_0$  和  $V_0$ , 计算在  $t = 58.05 \text{ h}$  时观测到的与预测的径向距离之间的差异  $\delta R_D \equiv R_{\text{obs}}(t) - R_D(t)$ , 以  $R_{\odot}$  为单位, 针对这两种情况分别进行计算. [6]

- (3b) 评估 CME-4 在太阳和地球之间的 P5、P6、P7 和 P8 点处的  $R_D(t)$  值, 采用与 (3a) 相似的流程: [4]

(C3)  $t_0$  被取为区间 P1 – P2 的中点;

(C4)  $t_0$  被取为区间 P3 – P4 的中点.

- (3c) 绘制 C3 和 C4 两种情况下的  $R_D(t)$  (以  $R_{\odot}$  为单位) 与  $t$  (以小时为单位) 的关系曲线, 针对 CME-4 在点 P5、P6、P7 和 P8 处的数据, 标记你的图作为“(3c)”. 在同一张图上, 绘制上述两种情况下的  $R_D(t)$  平滑曲线. 对于这一部分, 将  $x$  轴的范围设为 0 到 180 h. [10]

- (3d) 使用该图, 估计 CME-4 到达地球的实际到达时间与仅考虑阻力的模型预测的到达时间之间的绝对差值  $|\delta\tau|$ , 分别针对 C3 和 C4 的情况. [4]

- (3e) 在总结答题纸中勾选 (✓) 适当的框以指示以下陈述是 TRUE 还是 FALSE (无需书面说明): “太阳风对 CME 施加的阻力作用在 CME-3 中比 CME-4 更早变得主导.” [1]

- (4) 将阻力视为 (1) 中 10 个 CME 的主要作用力. 假设“仅阻力”模型适用于太阳表面 ( $R_0 = 1R_{\odot}$ ) 及以外的所有 CME. 估计并列出每个 CME 的太阳风速度  $V_s$ , 单位为  $\text{km s}^{-1}$ . 此外, 估计所有 10 个 CME 的平均太阳风速度  $V_{s,\text{avg}}$ . [7]