

第十八届国际天文与天体物理奥林匹克竞赛

理论试题

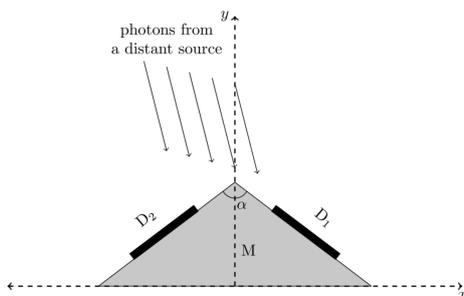
印度·孟买 2025年8月14日

1. Daksha 任务

[10分]

“Daksha”是一个印度提议的任务，包括两颗卫星 S_1 和 S_2 ，在相同的圆形轨道上运行，轨道半径 $r = 7000$ 公里，但两者之间有 180° 的相位差。这些卫星在 高能域（X 射线和伽马射线）观测宇宙。Daksha 任务中的每一颗卫星都使用多个扁平的矩形探测器。

为了理解如何定位天空中的一个源，我们将使用 Daksha 任务的简化模型。假设 S_1 只有两个相同的探测器 D_1 和 D_2 ，每个探测器的面积 $A = 0.50 \text{ m}^2$ 。这些探测器连接在一个不透明支架 M 上，如下图所示。探测器位于 y 轴对称的平面内，这些平面垂直于 x - y 平面，并且彼此之间形成一个角度 $\alpha = 120^\circ$ 。



- (1) 当观察位于 x - y 平面上的远处源时，探测器 D_1 检测到功率 $P_1 = 2.70 \times 10^{-10} \text{ J s}^{-1}$ ，探测器 D_2 检测到功率 $P_2 = 4.70 \times 10^{-10} \text{ J s}^{-1}$ 。

估计光源位矢与正 y 轴之间的角度 η ，逆时针方向的角度视为正。 [5]

考虑一个来自遥远源（不一定在 x - y 平面内）的单个脉冲，被 Daksha 的两个卫星（ S_1 和 S_2 ）记录。 S_1 和 S_2 记录的脉冲峰值时间分别为 t_1 和 t_2 。

- (2) 如果 $t_1 - t_2$ 测得为 $10.0 \pm 0.1 \text{ ms}$ ，则确定地球上源可能存在的区域所占的比例 f 。 [5]

2. Makar-Sankranti

[10分]

在印度，当太阳从地球上看似进入黄道十二宫中的摩羯座（Makar = 摩羯座，Sankranti = 进入）时，人们庆祝“Makar-Sankranti”节。该节日现在每年大约在 1 月 14 日庆祝。许多年前，这个节日与北半球的冬至（我们假设在 12 月 21 日）重合。

- (1) 根据以上信息，求这个节日上次与北半球冬至重合的年份 y_c 。 [3]

- (2) 已知太阳在 2006 年 1 月 14 日孟买当地时间 11:50:13 进入摩羯座的黄道区域，计算它在 2013 年进入摩羯座的日期 D_{enter} 和当地时间 t_{enter} 。 [3]

- (3) Makar-Sankranti 节是在黄道十二宫中的摩羯座第一个日落的时候庆祝的。你可以假设孟买一月的当地时间日落时间为 18:30:00。

请在 2006 年至 2013 年间每个年份标明节日的庆祝日期（在表中相应的框内勾选 \checkmark ）。

[4]

年份	1.14	1.15	1.16	年份	1.14	1.15	1.16
2006				2010			
2007				2011			
2008				2012			
2009				2013			

3. 引力波

[15 分]

环绕的双黑洞会产生引力波。考虑我们银河系中的两个黑洞，其质量分别为 $M = 36M_{\odot}$ 和 $m = 29M_{\odot}$ 。它们以圆轨道围绕其质心运行，轨道角频率为 ω 。

- (1) 考虑牛顿引力，在时间 t_{ini} 时，两个黑洞之间的距离是它们史瓦西半径之和的 4.0 倍。推导此时黑洞轨道的角频率 ω_{ini} 。用 M 、 m 和物理常数给出你的答案。

计算 ω_{ini} 的值（以 rad s^{-1} 为单位）。 [5]

- (2) 在广义相对论中，轨道上的黑洞会发射频率为 f_{GW} 的引力波，其满足 $2\pi f_{\text{GW}} = \omega_{\text{GW}} = 2\omega$ 。这会缩小黑洞轨道，从而增加 f_{GW} ，其变化率是

$$\frac{df_{\text{GW}}}{dt} = \frac{96\pi^{8/3}}{5} G^{5/3} c^{\beta} M_{\text{chirp}}^{\alpha/3} f_{\text{GW}}^{\delta/3},$$

其中 $M_{\text{chirp}} = \frac{(mM)^{3/5}}{(m+M)^{1/5}}$ 称为“啁啾质量”。

计算 α 、 β 和 δ 的值。 [4]

- (3) 假设与该事件相关的引力波首次在时间 $t_{\text{ini}} = 0$ 被检测到。 [6]

推导当 f_{GW} 变得非常大时黑洞合并的观测时间 t_{merge} 的表达式。用 ω_{ini} 、 M_{chirp} 和物理常数来表示你的答案。

计算 t_{merge} 的值（以秒为单位）。

4. 巴耳末减幅

[15 分]

考虑一颗被星云包围的主序星。这颗星在 V 波段的视星等为 11.315 等。靠近恒星的电离区域发射 $\text{H}\alpha$ 和 $\text{H}\beta$ 谱线；它们的波长分别为 $0.6563 \mu\text{m}$ 和 $0.4861 \mu\text{m}$ 。理论上预测的 $\text{H}\alpha$ 谱线与 $\text{H}\beta$ 谱线的通量比为 $f_{\text{H}\alpha}/f_{\text{H}\beta} = 2.86$ 。然而，当这些辐射穿过星云外层的冷尘埃区域后，观测到的 $\text{H}\alpha$ 和 $\text{H}\beta$ 谱线的发射通量分别为 $6.80 \times 10^{-15} \text{ W m}^{-2}$ 和 $1.06 \times 10^{-15} \text{ W m}^{-2}$ 。

消光 A_{λ} 是波长的函数，表示为

$$A_{\lambda} = \kappa(\lambda)E(B - V).$$

在这里， $\kappa(\lambda)$ 是消光曲线， $E(B - V)$ 表示在 B 和 V 滤光片波段中的颜色过剩。消光曲线（ λ 以 μm 为单位）给出如下。

$$\kappa(\lambda) = \begin{cases} 2.659 \times \left(-1.857 + \frac{1.040}{\lambda} \right) + R_V, & 0.63 \leq \lambda \leq 2.20 \\ 2.659 \times \left(-2.156 + \frac{1.509}{\lambda} - \frac{0.198}{\lambda^2} + \frac{0.011}{\lambda^3} \right) + R_V, & 0.12 \leq \lambda < 0.63 \end{cases}$$

其中， $R_V = A_V/E(B - V) = 3.1$ 是总消光与选择性消光的比值。

(1) 求出 $\kappa(\text{H}\alpha)$ 和 $\kappa(\text{H}\beta)$ 的值. [3]

(2) 出色余比值的值 $\frac{E(\text{H}\beta - \text{H}\alpha)}{E(B - V)}$. [4]

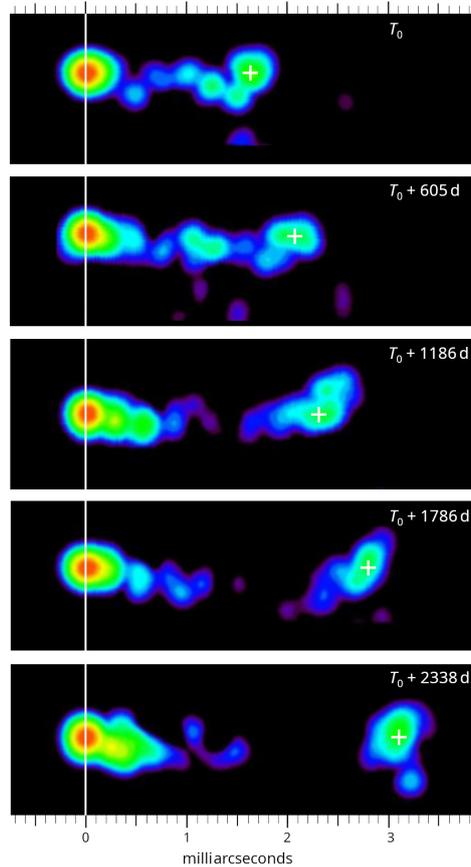
(3) 估计由于星云引起的 $\text{H}\alpha$ 和 $\text{H}\beta$ 波段的消光, $A_{\text{H}\alpha}$ 和 $A_{\text{H}\beta}$. [6]

(4) 估计星云的消光 (A_V) 和在没有星云时恒星在 V 波段的视星等 m_{V0} . [2]

5. 类星体

[20 分]

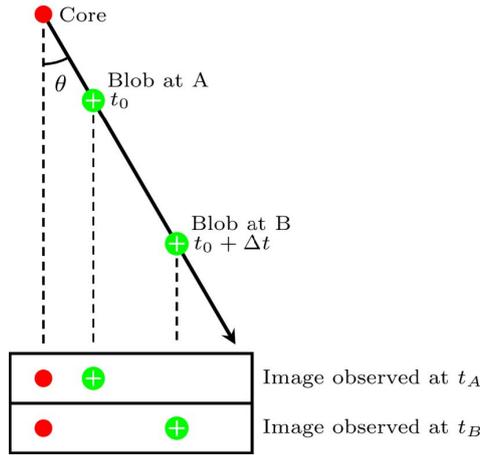
一个类星体是一个由超大质量黑洞驱动的极其明亮的活跃星系, 它会发射相对论性喷流. 图中显示了同一类星体 (红移 $z = 0.53$, 光度距离 $D_L = 1.00 \times 10^{10}$ ly) 在不同时间的射电图像系列. 其中“核心”与垂直的白色直线对齐, 而由一个“团状物” (标记为白色 +) 组成的喷流随时间远离核心. 每个面板显示的观测时间从第一个图像开始以 T_0 表示. 图的顶部和底部标有角尺度.



(1) 对于每个观测, 确定团状物相对于类星体核心的角距离 ϕ_{blob} (以毫角秒为单位) 和横向距离 l_{blob} (以光年为单位). 然后, 利用连续的观测计算团状物的横向视速度 v_{app} (以光速的分数表示, $\beta_{\text{app}} = v_{\text{app}}/c$). 最后, 计算整个观测期间的平均视速度 $\beta_{\text{app}}^{\text{ave}}$. [5]

类星体喷流实际上以相对论速度 $v \equiv \beta c$ 运动, 但不一定是在天球平面上; 例如, 它与遥远观测者的视线 (用虚线表示) 形成一个角度 θ (称为“观测角度”), 如下面的示意图所示.

对于这部分以及所有后续部分, 忽略类星体的红移和任何相对论效应.



(2) 这个团块在两个不同的时间 t_0 (对应位置 A) 和 $t_0 + \Delta t$ (对应位置 B) 发出的光分别到达观察者的时间为 t_A 和 t_B . 这意味着观察到 (视) 的时间差为 $\Delta t_{\text{app}} = t_B - t_A$.

(a) 找出 $\frac{\Delta t_{\text{app}}}{\Delta t}$ 的比值表达式, 用 β 和 θ 表示. [2]

(b) 使用这个比率, 将 β_{app} 用 β 和 θ 表示出来. [2]

(3) 如果物体的视速度超过光速 ($\beta_{\text{app}} > 1$), 则称为超光速运动, 如果不超过 ($\beta_{\text{app}} < 1$), 则称为亚光速运动.

(a) 对于 $\beta_{\text{app}} = 1$, 绘制 β 作为 θ 函数的平滑曲线以标记亚光速和超光速运动之间的边界. 用斜线 (///) 在图中对超光速区域进行着色. [4]

(b) 找出超光速运动发生的最低真实喷流速度 ($\beta_{\text{low}} = v_{\text{low}}/c$) 及其对应的观测角度 θ_{low} . [2]

(4) 找出最大视角 θ_{max} 的表达式, 使得给定的 β_{app} 值成为可能. [2]

类星体的核心, 即其中央致密天体, 其辐射的变异性源于因果关联区域内发生的内部过程. 该区域的尺度 (半径) 通常被认为是核心史瓦西半径的五倍左右.

(5) 某个类星体的核心被发现其变化时间尺度约为 1 小时. 求得中心致密天体质量的上限 $M_{\text{c,max}}$, 单位为太阳质量. [3]

6. 银河系自转 [20 分]

我们银河系的旋转曲线是通过观测不同银道经度处的中性氢 (HI) 云在视线方向上的速度, 利用 21 厘米 HI 谱线确定的. 考虑一个位于银心 (GC) 距离为 R , 且距离太阳为 D 的 HI 云, 其银经为 l . 假设太阳距离银心为 $R_0 = 8.5 \text{ kpc}$. 假设太阳和 HI 云都在银道面上以角速度 Ω_0 和 Ω , 以及旋转速度 V_0 和 V 分别绕银心做圆周运动.

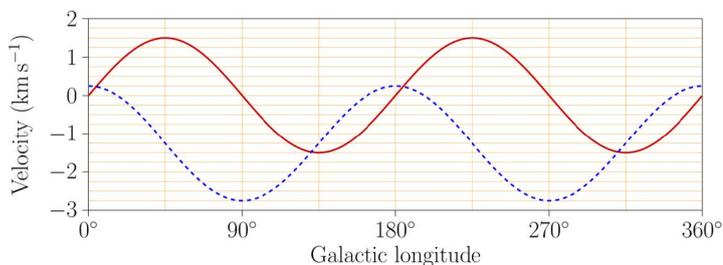
云的视线速度 (V_r) 和横向速度 (V_t) 分量, 如从太阳观测, 可以表示为

$$V_r = (\Omega - \Omega_0)R_0 \sin l,$$

$$V_t = (\Omega - \Omega_0)R_0 \cos l - \Omega D.$$

从北银极看, 银河的旋转方向是顺时针方向. 在本题中, 我们将视向速度定义为远离时为正值, 云团将被视为点物体.

- (1) 在总结答题纸提供的图中，绘制从 $D = 0$ 到 $D = 2_0$ 的 V_r 与 D 的关系曲线，针对两个视线方向 (i) $l = 45^\circ$ 和 (ii) $l = 135^\circ$ 。用 l 的值标记你画的每条线/曲线。 [5]
- (2) 下图显示了距离太阳 100 pc 处的恒星的平均径向（实线，红色曲线）和横向（虚线，蓝色曲线）速度分量，以银经为函数进行绘制。



使用该图，估计太阳绕银河中心 (GC) 的轨道周期 (P)，以百万年 (Myr) 为单位。 [3]

- (3) 简·奥尔特指出，在太阳邻域 ($D \ll R_0$) 中，角速度差异 ($\Omega - \Omega_0$) 将很小，因此推导出以下对视线速度和横向速度分量的一阶近似：

$$V_r = AD \sin 2l,$$

$$V_t = AD \cos 2l + BD.$$

其中 A 和 B 被称为奥尔特常数。

让我们考虑两种情况：

(I) 银河系的实际观测旋转曲线，以及

(II) 旋转曲线是针对一个假设情景，其中银河系不含暗物质，且银河系的全部质量被假定集中在其中心。

(a) 推导太阳所在位置的旋转速度径向梯度 $\left. \frac{dV}{dR} \right|_{R=R_0}$ 的两种情况的表达式。 [2]

(b) 用 V_0 、 R_0 以及太阳所在位置的径向旋转速度梯度 $\left. \frac{dV}{dR} \right|_{R=R_0}$ 来表示 A 和 B 。 [8]

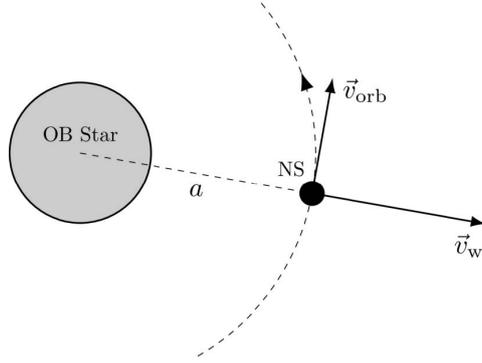
(c) 奥尔特常数在两种给定情况 (I) 和 (II) 中的比值 (A/B) 分别定义为 F_I 和 F_{II} 。确定 F_I 和 F_{II} 。 [2]

7. 中子星双星

[20 分]

在一个包含致密星的双星系统中，当伴星没有溢出洛希瓣时，致密星的吸积主要来源于伴星的恒星风。这种由风提供的吸积在包含早期型星（如 O 或 B 星，以下简称 OB 星）的系统中尤为显著，特别是当伴星与致密天体（如中子星）处于紧密轨道时。

考虑这样一个 NS-OB 星双星系统，其中质量为 $M_{NS} = 2.0M_\odot$ 、半径为 $R_{NS} = 11$ km 的中子星以轨道速度 $v_{orb} = 1.5 \times 10^5$ m s⁻¹ 绕 OB 星中心以半径 a 做圆周运动（见下图）。在整个问题中，假设 OB 星的质量损失是球对称的，其损失速率为 $\dot{M}_{OB} = 1.0 \times 10^{-4} M_\odot$ yr⁻¹。



- (1) 吸积半径 R_{acc} 被定义为恒星风被中子星捕获的最大距离. 如果中子星轨道距离处的恒星风速度为 $v_w = 3.0 \times 10^6 \text{ m s}^{-1}$, 使用标准逃逸速度计算, 求该系统中的 R_{acc} 值 (单位为 km). [3]
- (2) 假设所有捕获的物质都被中子星吸积, 估计从恒星风到中子星的质量吸积率 \dot{M}_{acc} , 以 $M_{\odot} \text{ yr}^{-1}$ 为单位, 如果 $a = 0.5 \text{ AU}$. 忽略辐射压力和吸积气体有限的冷却时间的影响. [3]
- (3) 现在考虑一种情况, 即在轨道距离 a (靠近中子星) 处, 恒星风的速度与中子星的轨道速度相当. 在这种情况下, 从恒星风向中子星转移的质量通量可以表示为 $\dot{M}_{\text{acc}} = \dot{M}_{\text{OB}} f(\tan \beta, q)$, 其中 $q = M_{\text{NS}}/M_{\text{OB}}$ 是双星系统的质量比, $\tan \beta$ 是风速度方向与远离 OB 星的径向方向之间的夹角, 在中子星的参考系中. 假设 $M_{\text{OB}} \gg M_{\text{NS}}$, 求 $f(\tan \beta, q)$ 的表达式. [6]
- (4) 考虑完全电离的物质径向堆积, 并由于中子星的强磁场 B 而受到阻碍. 这种效应可以建模为一种压力, 其表达式为 $\frac{B^2}{2\mu_0}$. 我们将假设中子星具有一个偶极磁场, 其在赤道平面内的强度随距离 r ($r \gg R_{\text{NS}}$) 而变化

$$B(r) = B_0 \left(\frac{R_{\text{NS}}}{r} \right)^3,$$

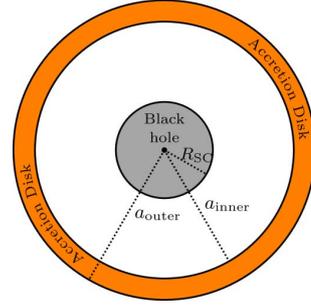
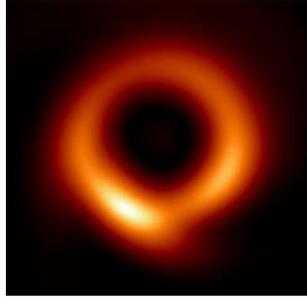
其中 B_0 是中子星赤道处的磁场. 假设磁偶极子的轴与中子星的自转轴对齐.

- (a) 求赤道平面处的磁压 $P_{\text{eq,mag}}$, 用 B_0 、 R_{NS} 、 r 和其他合适的常数表示. [1]
- (b) 在赤道平面处, 吸积流被磁场停止的最大距离称为磁层半径 R_m . 这种物质流动会由于入射恒星风与中子星之间的相对运动而产生压力. 求出使 R_m 与 R_{acc} 重合的临界磁场 $B_{0,c}$ 的近似表达式, 并计算其数值 (单位为特斯拉). 对于 $r > R_m$ 的区域, 忽略磁效应, 并考虑 $v_w \gg v_{\text{orb}}$. [7]

8. 黑洞的阴影 [20 分]

事件视界望远镜 (EHT) 发布了 M87 星系中心超大质量黑洞的图像, 如下方左图所示.

为了理解该图像的一些简单特征, 我们将考虑一个简化模型: 一个质量为 $M = 6.5 \times 10^9 M_{\odot}$ 、不旋转、静态、球对称的黑洞, 其周围有一个无质量、薄、平面状的吸积盘, 内半径和外半径分别为 $a_{\text{inner}} = 6R_{\text{SC}}$ 和 $a_{\text{outer}} = 10R_{\text{SC}}$, 其中 R_{SC} 是史瓦西半径. 下方右图显示了正面视角的示意图 (图的比例不准确).



我们假设吸积盘是唯一需要考虑的光源. 吸积盘上的每个点都会向各个方向发射光线. 这些光线在黑洞的引力场影响下传播. 光线的传播路径由下面的两个方程决定 (这些方程与物体绕太阳运动时的方程类似):

$$\frac{1}{2}v_r^2 + \frac{L^2}{2r^2}\left(1 - \frac{2GM}{c^2r}\right) = E; \quad v_\phi = r\omega = \frac{L}{r};$$

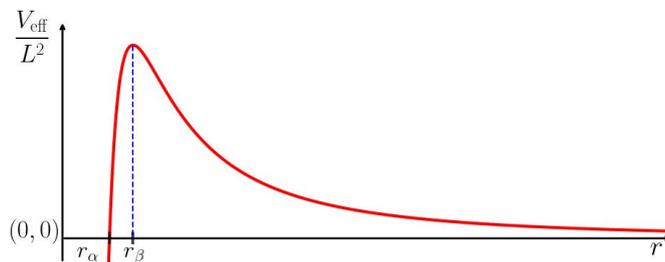
其中 $r \in (R_{SC}, \infty)$ 是径向坐标, $\phi \in [0, 2\pi)$ 是方位角, E 和 L 分别是与守恒能量和守恒角动量相关的常数.

这里 $v_r = dr/dt$ 是径向速度的大小, v_ϕ 是切向速度的大小, 而 $\omega = d\phi/dt$ 是角速度. 我们定义轨迹的冲击参数为 $b = \frac{L}{\sqrt{2E}}$. 这个问题中忽略时间膨胀.

另一个有用的方程可以通过对第一个方程求导得到:

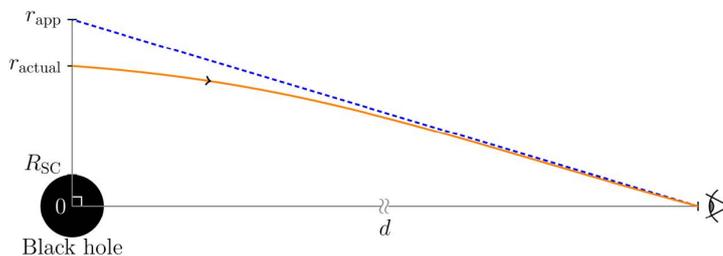
$$\frac{dv_r}{dt} - \frac{L^2}{r^3} + \frac{3GML^2}{c^2r^4} = 0.$$

- (1) 黑洞周围可以存在环形光轨迹. 找出这种光线轨迹的半径 r_{ph} 和碰撞参数 b_{ph} , 用 M 和相关常数表示. [4]
- (2) 计算光子完成圆周光路中一个完整轨道所需的时间 T_{ph} , 单位为秒. [2]
- (3) 上述径向速度方程 (本问题中的第一个方程) 可以与光轨迹的方程 $\frac{v_r^2}{2} + V_{eff}(r) = E$ 进行比较. 下面给出了 V_{eff}/L^2 随 r 变化的示意图.



- (a) 图中表示了两个特殊的半径, r_α 和 r_β . 推导出 r_α 和 r_β 的表达式, 用 M 和相关常数表示. [2]
- (b) 一个光子从吸积盘向黑洞内部传播时, 在某些情况下仍可以逃逸到无限远处. 找出这种光子的转折点半径 r_t 的最小值表达式, 用 M 和相关常数表示. 找出这种光子的最小影响参数 b_{min} 的表达式. [3]

- (4) 一束来自天空平面距离系统中心 r_{actual} 的光线会因为黑洞的引力而发生强烈弯曲，最终到达一个距离系统很远的观测者（用眼睛表示），如下图所示。

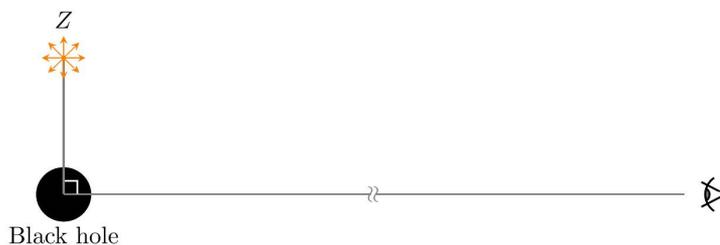


对这位观察者来说，这条光线似乎来自黑洞中心在天球平面上距离为 $r_{\text{app}} \approx b$ 的另一点，其中 b 是该光子轨迹的碰撞参数。对于在吸积盘上位于 $r = r_{\text{actual}}$ 处的点，可以假设以下关系：

$$b(r_{\text{actual}}) \approx r_{\text{actual}} \left(1 + R_{\text{SC}}/r_{\text{actual}}\right)^{1/2}.$$

对于远处的观测者，就像我们自己一样，以面对盘面的视角观察吸积盘，这个系统的图像在天球平面上看起来会呈现圆对称性。确定图像的最外侧表观半径 r_{outer} 和最内侧表观半径 r_{inner} ，单位为 AU。 [5]

- (5) 考虑到一个孤立的超大质量黑洞，其质量为 $M = 6.5 \times 10^9 M_{\odot}$ ，没有吸积盘。如图所示，在距离黑洞一定位置（例如 $r_Z = 6R_{\text{SC}}$ ）的点 Z 处发生了一次持续 5 秒的强烈电磁辐射爆发。点 Z 处的爆发向各个方向发射光。一个位于黑洞远处的观测者（图中用眼睛表示）对黑洞周围的区域进行长时间曝光拍摄，曝光时间为 60 秒。



对下列每个陈述，请选择正确的选项：

- (a) 从 Z 到观察者的光可能传播的路径数目是 [2]
 (A) 至多 1 个 (B) 恰好 1 个 (C) 恰好 2 个 (D) 多于 2 个
- (b) 在长时间曝光图像中将看到的电磁爆发在 Z 点的图像数量是 [2]
 (A) 至多 1 个 (B) 恰好 1 个 (C) 恰好 2 个 (D) 多于 2 个

9. 大气视宁度 [35 分]

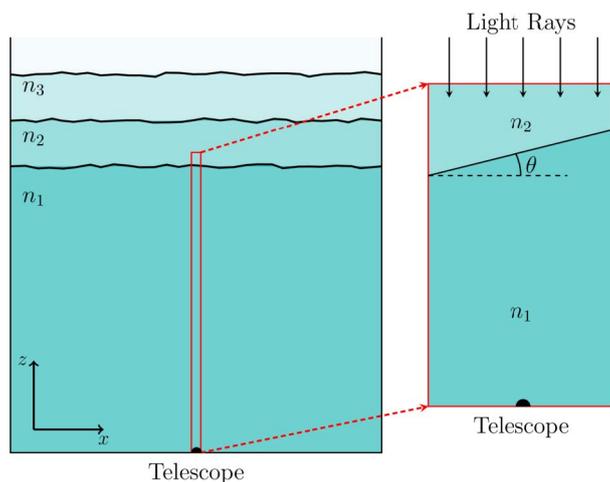
一个望远镜有一个焦距 $f = 200 \text{ cm}$ 、直径 $D = 15 \text{ cm}$ 的复合消色差物镜，对准天顶处的星星。

- (1) 找出由物镜在焦平面上形成的点光源像的直径（以米为单位）， d_{image} ，考虑仅衍射效应的情况，对于绿光 ($\lambda = 550 \text{ nm}$)。 [1]

天体源的像也会受到所谓的“大气视宁度”的影响。

大气层中各层之间的边界以及各层的折射率由于湍流、温度变化和其他因素而不断变化。这会导致望远镜焦点平面上恒星像位置发生微小变化，这种现象称为“闪烁效应”。在接下来的问题中，除了使用上述的恒星像的有限衍射受限尺寸外，不再考虑任何干涉效应。

下图左侧显示了大气的垂直横截面，包含多个不同折射率的层 (n_1, n_2, n_3, \dots)。右侧显示了大气中一个薄的垂直段及其两个最低折射率层 (n_1 和 n_2 , $n_1 > n_2$) 之间的边界。我们仅考虑这两个层及其边界来解决这个问题。图示不按比例。

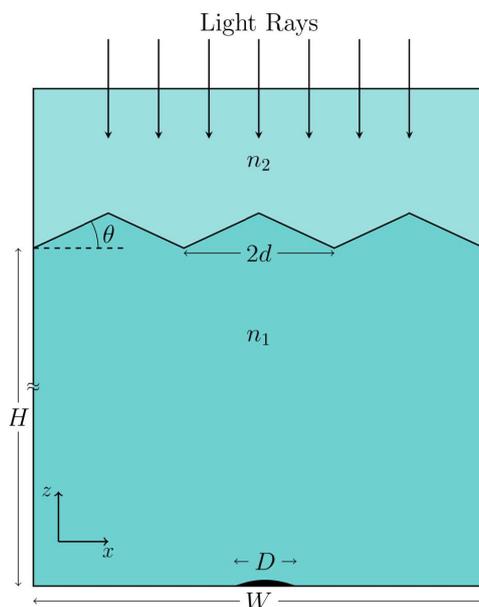


- (2) 让两层之间的边界位于望远镜物镜正上方高度 $H = 1 \text{ km}$ 处，与水平面呈 $\theta = 30^\circ$ 的倾斜角。在本题的所有部分中， θ 均取逆时针方向为正。对于单色光源， $n_1 = 1.00027$ 和 $n_2 = 1.00026$ 。设望远镜焦点平面上某位于天顶的恒星的像的角位移为 α 。
- (a) 在边界处绘制一个适当标注的光线图，显示 n_1 、 n_2 、 θ 和 α 。 [2]
- (b) 找出 α 用 θ 、 n_1 和 n_2 表示的表达式。使用小角度近似： $\sin \alpha \approx \alpha$ 和 $\cos \alpha \approx 1$ 。 [2]
- (c) 计算当 θ 增加 1% (保持 n_1 和 n_2 不变) 时，像位置的位移 Δx_θ (以米为单位)。 [3]
- (d) 计算当 n_2 增加 0.0001% (保持 n_1 和 θ 不变) 时，像位置的位移 Δx_n (以米为单位)。 [3]
- (3) 对于来自天顶的恒星发出的白光，选择以下哪一行最准确地描述了像的形状和颜色，在总结答题纸中打勾 (✓) 选择适当的选项 (仅一个)。注意图中 x 向右增加。 [2]

	像颜色	像形状	左边缘	右边缘
A	白色	圆形		
B	白色	椭圆形		
C	彩色	圆形	蓝色	红色
D	彩色	圆形	红色	蓝色
E	彩色	椭圆形	蓝色	红色
F	彩色	椭圆形	红色	蓝色

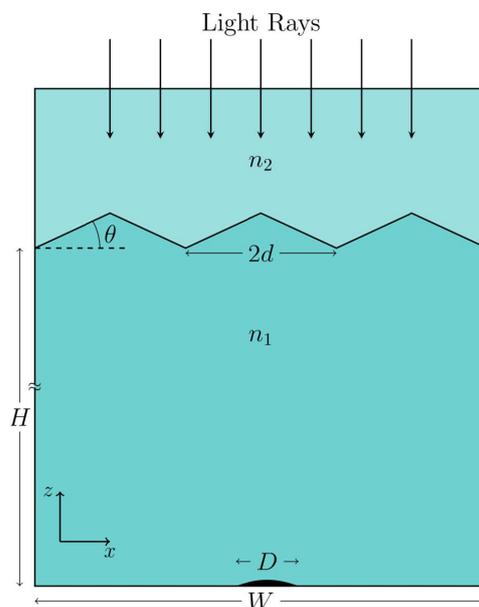
对于本问题的所有剩余部分，我们考虑波长为 $\lambda = 550 \text{ nm}$ 的单色绿光。我们将各层之间的边界建模为一组无限的锯齿形平面 (垂直于页面平面)，沿 x 轴方向间隔 $d = 10 \text{ cm}$ ，角度为 $\theta = 10^\circ$ 或 $\theta = -10^\circ$ 。

下图（比例不准确）显示了这种大气模型的横截面，其宽度为 W ($W \ll H$)。对于大孔径望远镜来说，这种边界折线特性会导致焦平面上出现斑点。



(4) 考虑一个如上所述的大气模型。

(a) 下图显示了具有连续锯齿平面的气层部分，其参数与上述相同（比例不准确）。



在摘要答案纸上的此图复制件中，画出入射光线路径，直到望远镜物镜放置的平面，该平面由图下方的灰色虚线所示。

在图中用“X”标出（如果有）那些不会接收到光线的区域。 [4]

(b) 计算此类区域的宽度 W_X 。 [3]

(c) 通过适当选择望远镜相对于边界结构的位置，找到可以获得恒星单一图像的望远镜物镜的最大直径 D_{\max} 。 [4]

(5) 考虑边界在 x 和 y 方向上都允许呈现锯齿形状（如同金字塔的视场），且 $D = 100 \text{ cm}$ （焦距 $f = 200 \text{ cm}$ ）的情况。

在总结答题纸上给出的方框中绘制结果斑点的定性模式。 [6]

- (6) 对湍流大气，考虑相同的锯齿形状沿 x 方向平行于边界层延伸，但现在两个平面之间的夹角在 1.0 秒内以均匀速率从 10° 变化到 -10° ，这导致图像位置以均匀速率移动。

考虑一个口径 $D = 8 \text{ cm}$ 、焦距 $f = 1 \text{ m}$ 的望远镜。估计其 CCD 相机允许的最长曝光时间 t_{\max} ，使得只能得到一个图像，且图像位置的任何可能偏移量小于衍射极限直径的 1%。 [5]

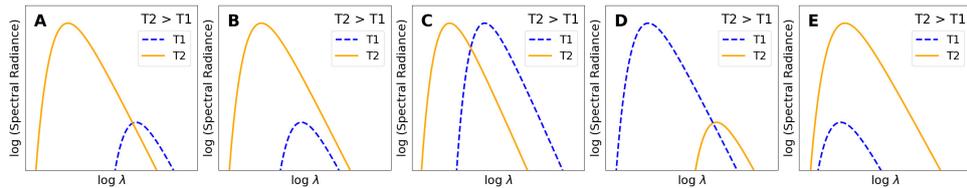
10. 大爆炸核合成 [35 分]

在宇宙早期的辐射主导时期，宇宙的尺度因子 $a \propto t^{1/2}$ ，其中 t 是自大爆炸以来的时间。在这一时期大部分时间里，中子 (n) 和质子 (p) 通过弱相互作用保持热平衡。自由中子或质子的数量密度 (N) 与温度假设 T 以及它们相应的质量 m 有关，使得

$$N \propto m^{3/2} \exp\left(-\frac{mc^2}{k_B T}\right),$$

只要时间 $t \leq t_{\text{wk}} = 1.70$ 秒，当 $k_B T \geq k_B T_{\text{wk}} = 800 \text{ keV}$ 。在 t_{wk} 之后，弱相互作用不能再维持这样的平衡，自由中子衰变成质子的半衰期为 610.4 秒。

- (1) 让质子的数量密度为 N_p ，中子的数量密度为 N_n 。计算在时间 t_{wk} 时由比值 $X_{n,\text{wk}} = N_n / (N_n + N_p)$ 给出的中子相对丰度。 [4]
- (2) 光子在所有时期都保持热平衡并维持黑体谱。
- (a) 找到指数 β ，使得 $T(a) \propto a^\beta$ 。 [2]
- (b) 识别以下哪些图显示了两种温度 T_1 和 T_2 的谱能量密度的正确行为。在总结答案表中打勾 (✓) 正确的选项。 [2]



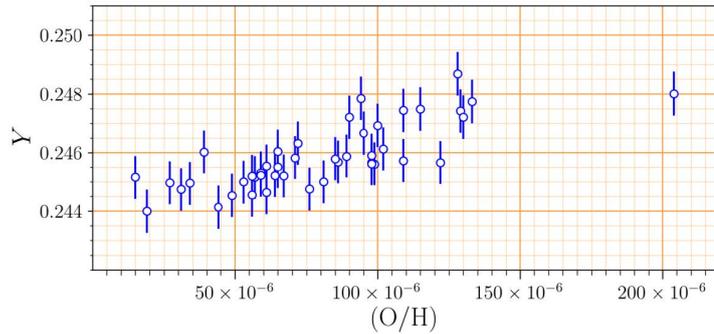
- (3) 在 t_{wk} 之后，由质子和中子形成氦的过程由萨哈方程所支配，该方程由印度物理学家梅格纳德·萨哈教授提出，可以简化为

$$\frac{N_D}{N_n} = 6.5\eta \left(\frac{k_B T}{m_n c^2}\right)^{3/2} \exp\left[-\frac{(m_D - m_p - m_n)c^2}{k_B T}\right].$$

在这里，重子与光子的比值 η 是 6.1×10^{-10} ， N_D 是氦的数密度。

- (a) 在总结答案表的网格上绘制 N_D/N_n 比值，温度取至少 4 个在 $k_B T = [60, 70] \text{ keV}$ 范围内合理分布的值，并通过这些点画一条光滑曲线。 [5]
- (b) 从图中找出当 $N_D = N_n$ 时的 $k_B T_{\text{nuc}}$ (单位为 keV)。 [1]
- (c) 相反，现在假设所有自由中子在 $k_B T_{\text{nuc}}$ 时立即与质子结合形成氦，然后立即转化为氦 (${}^4_2\text{He}$)。计算形成氦的相应核合成时间 t_{nuc} (以秒为单位)。 [4]

- (4) 计算 t_{nuc} 时刻之前 $X_{\text{n,nuc}}$ 的值. [5]
- (5) 原始氦丰度, Y_{prim} , 被定义为宇宙中在 t_{nuc} 之后, 束缚在氦中的总重子质量所占的分数. 获得 Y_{prim} 的理论估计值. 为了此次计算的目的, 假设 $m_{\text{p}} \approx m_{\text{n}}$, 并且氦的质量 $m_{\text{He}} \approx 4m_{\text{n}}$. [3]
- (6) 氦的原始丰度很难测量, 因为恒星不断地将宇宙中的氢转化为氦. 在星系中, 恒星处理的量可以通过氧 (仅由恒星产生) 相对于氢的相对数密度来表征, 记作 (O/H). 下面绘制了不同星系中 (O/H) 和氦丰度 Y 的测量结果.



使用本图中的点 (该图在总结答题纸中复现) 来回答以下问题.

- (a) 估计一个氧氢比为 $(\text{O}/\text{H}) = 1.75 \times 10^{-4}$ 的蓝致密矮星系的 Y 值. [2]
- (b) 获取上述数据拟合的直线的斜率 $dY/d(\text{O}/\text{H})$. [2]
- (c) 根据以上数据估计原始氦丰度, $Y_{\text{prim}}^{\text{obs}}$. [2]
- (7) Y_{prim} 和 $Y_{\text{prim}}^{\text{obs}}$ 之间的偏差可以通过改变重子与光子比值 η 来解决. 当 η 减小时, 如总结答题纸中的 \downarrow 所示, 应在摘要答案表提供的方框中指示 $N_{\text{D}}/N_{\text{n}}(T)$ 、 T_{nuc} (当 $N_{\text{D}} = N_{\text{n}}$ 时)、 t_{nuc} 、 $X_{\text{n,nuc}}$ 和 Y_{prim} 的增加 (\uparrow) 或减少 (\downarrow). [3]

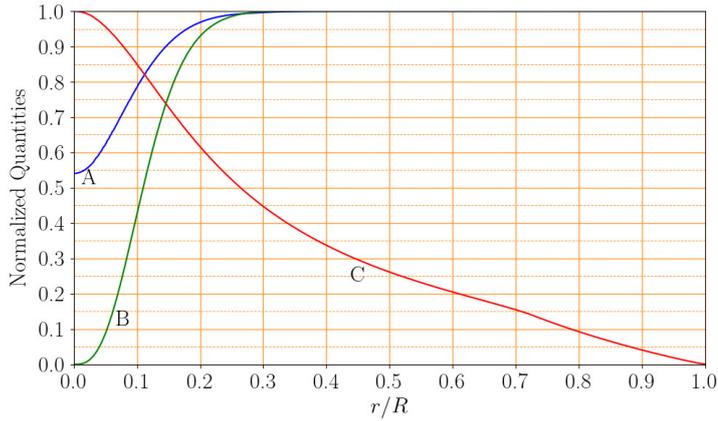
11. 图中星 [50 分]

恒星可以很好地近似为球对称物体, 因此在建模恒星内部时可以将从中心到某一点的径向距离 r 作为唯一的独立变量. 半径为 r 的球体内所包含的质量用 $m(r)$ 表示. 光度 $l(r)$ 定义为单位时间内通过半径为 r 的球面向外流动的净能量. 其他感兴趣的量例如密度 $\rho(r)$ 、温度 $T(r)$ 、氢的质量分数 $X(r)$ 、氦的质量分数 $Y(r)$ 以及单位质量和单位时间产生的核能 $\epsilon_{\text{nuc}}(r)$, 都被视为 r 的函数. 在整个问题中, 我们将忽略恒星内部元素的扩散和重力沉降效应.

符号 “log” 指以 10 为底的对数. 该问题由三个独立部分组成.

(1) 第一部分: 恒星内部

下图显示了质量为 $1M_{\odot}$ 、年龄为 4 Gyr 的恒星模型中三个结构量 A、B 和 C 随分数半径 r/R 的变化情况, 其中 R 是恒星的光球半径. 恒星在 (光球) 表面的氦质量分数 Y_{s} 和金属丰度 (所有比氦重的元素的质量分数) Z_{s} 分别为 $(Y_{\text{s}}, Z_{\text{s}}) = (0.28, 0.02)$. 图中所有显示的量都以其各自的最大值进行了归一化.



(a) 从五个可能性中唯一地识别出三个量 A、B 和 C: [6]

$$T(r), \quad l(r), \quad \epsilon_{\text{nuc}}(r), \quad X(r), \quad Y(r).$$

(在总结答题纸上, 将 A/B/C 写在适当的量旁边. 不需要对答案进行说明.)

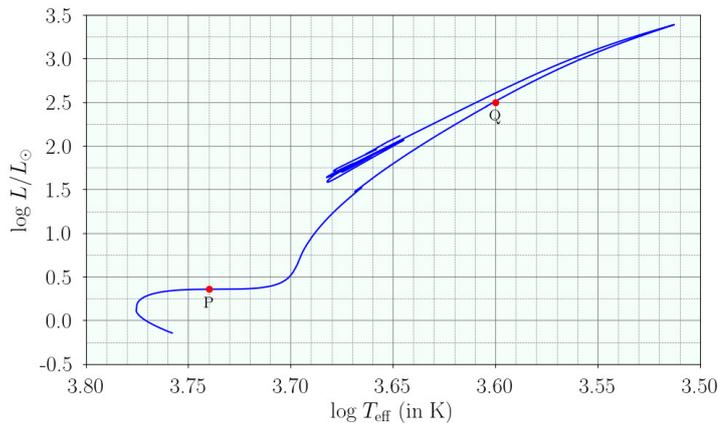
(b) 这颗恒星中心的氦质量分数 Y_c 是多少? [3]

(c) 从 (a) 中给出的五个量 (未被识别为曲线 A、B 或 C) 列表中, 绘制剩余的两个量作为 r/R 函数在同一图上, 并在图中标注你的曲线以表示它们各自对应的量. [5]

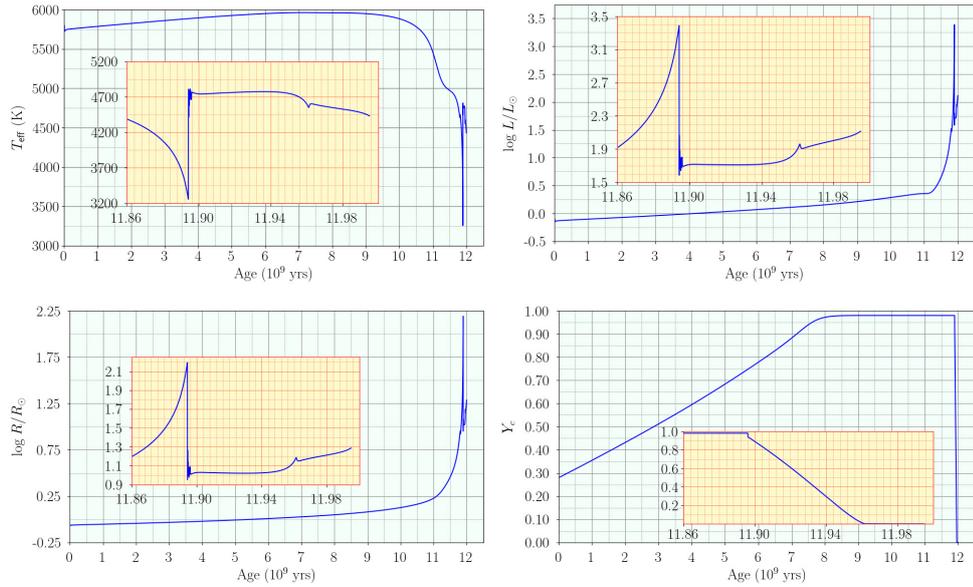
(2) 第二部分: 演化的恒星

考虑一个初始均匀组成的 $1M_{\odot}$ 恒星的演化过程, 其初始氦元素质量分数为 $Y_0 = 0.28$, 并且金属元素质量分数为 $Z_0 = 0.02$. 下面的图显示了该恒星从零龄主序阶段 (ZAMS) 演化到其核心停止燃烧氦元素时, 各种全局量的变化情况.

下图显示了恒星在赫罗图 (以 $\log L/L_{\odot}$ 对 $\log T_{\text{eff}}$ 作图, 其中 L 是表面光度, T_{eff} 是有效温度) 上的演化轨迹.



下图包含四个图表, 分别展示了同一恒星的 T_{eff} (单位为 K)、 L (以 $\log L/L_{\odot}$ 形式绘制)、 R (以 $\log R/R_{\odot}$ 形式绘制) 和 Y_c 随年龄 (单位为 10^9 年) 的变化. 在这些四个图表中, 插图详细展示了这些量在 11.86×10^9 年至 12.00×10^9 年之间的变化, 以提高清晰度.



使用这些图表来回答下面的问题.

- (a) 这颗恒星的主序星寿命 t_{MS} (以年为单位) 大约是多少? [1]
- (b) 恒星在其核心燃烧氦气的持续时间, Δt_{He} (以年为单位) 大约是多少? [1]
- (c) 恒星的光度为 $1L_{\odot}$ 时, 其核心处初始氢的燃烧比例 f_{H} 是多少? [3]
- (d) 恒星 R_1 的半径是多少, 当其核心的氢初始量有 60% 被消耗时? 请以 R_{\odot} 为单位作答. [3]
- (e) 这颗恒星在赫罗图上标记的位置 P 和 Q 对应的半径 R_{P} 和 R_{Q} 分别是多少? 请以 R_{\odot} 为单位给出答案. [4]

(3) 第三部分: 恒星内部的质量分布

支配恒星内部质量分布的方程由以下给出:

$$\frac{dm(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r).$$

用三个无量纲变量来表达这个方程会很方便, 即质量分数 q 、半径分数 x 以及相对密度 σ , 我们定义为

$$q = m/M, \quad x = r/R, \quad \sigma = \rho/\bar{\rho},$$

其中 M 和 R 分别是恒星的总质量和半径, $\bar{\rho} \equiv \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}$ 是恒星的平均密度. 对于我们在

本部分将要讨论的特定恒星, 给出以下信息:

- 中心密度 $\rho(x=0) = 80\bar{\rho}$.
- 这颗恒星质量的一半包含在其总半径内 25% 的区域, 其质量的 70% 包含在其总半径内 35% 的区域.

在本问题的所有后续部分中, 所有导出数值系数只需四舍五入到小数点后三位.

- (a) 表达上述描述质量与半径之间依赖关系的方程, 用 x 、 $\frac{dq(x)}{dx}$ 和 $\sigma(x)$ 来表示. [2]

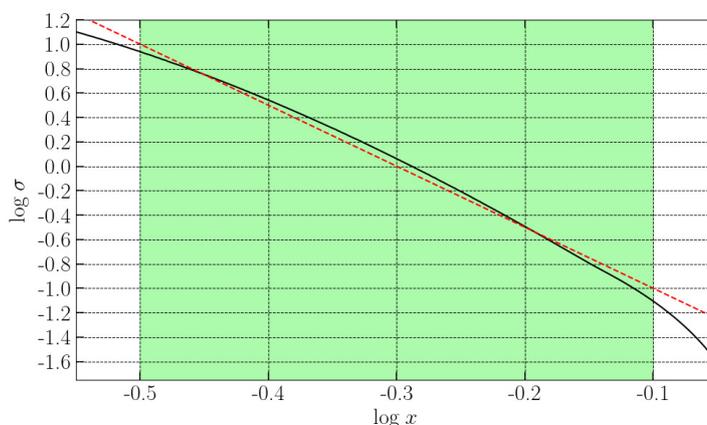
为了获得质量随半径的分布，我们需要知道恒星内部的密度分布. 为了解决这个问题，我们将通过两个 x 域的近似形式来描述密度随半径的变化：

- 恒星的内部部分： $0 \leq x \leq 0.32$;
- 恒星的中间部分： $0.32 < x < 0.80$;

我们不对最外层部分进行近似，即 $0.80 \leq x \leq 1.00$.

(b) 中间部分的近似：

恒星中间部分的 $\log \sigma$ 随 $\log x$ 的变化情况如下面的图中（黑色曲线）所示. 我们将在域 $-0.5 < \log x < -0.1$ （即 $0.32 \lesssim x \lesssim 0.80$ ，如图中绿色阴影区域所示）内对 $\log \sigma$ 作为 $\log x$ 的函数进行线性近似（图中红色虚线所示）. 我们将用最近的整数来近似该直线的斜率.



使用这个近似来写出 $\sigma(x)$ 作为 x 的函数在 $0.32 < x < 0.80$ 区间内的表达式. [4]

(c) 使用 (b) 的结果推导出在域 $0.32 < x < 0.80$ 中 $q(x)$ 的表达式. [6]

(d) 内层部分的近似值：

在恒星的内部区域 ($0 \leq x \leq 0.32$)，密度可以近似为半径的线性函数，即 $\sigma(x) = Ax + B$ ，其中 A 、 B 为常数. 确定 A 和 B ，从而得到该区域 $0 \leq x \leq 0.32$ 内 $q(x)$ 的表达式. 注意，前一部分和本部分所采用的近似可能导致在 $x = 0.32$ 处密度或质量出现小的不连续性. [8]

(e) 在 (c) 和 (d) 中得到的 $q(x)$ 表达式是近似值，它们很好地描述了质量随半径的变化，但仅在恒星的特定区域有效. 对于区域 $0.80 \leq x \leq 1$ （我们尚未推导出该区域的表达式），可以使用邻近区域的适当外推法. 利用这些近似表达式和给定数据，绘制 $q(x)$ 与 x 的光滑曲线 ($q(x)$ 及其导数均无间断)，以表示整个恒星 ($0 \leq x \leq 1$) 中质量随半径的变化. [4]

12. 黑洞的霍金辐射 [50 分]

(1) 黑洞 (BH) 通常是由大质量恒星在其生命周期结束时发生引力坍缩形成的一个点，称为奇点. 由于这种天体具有极强的引力，任何进入所谓事件视界（一个以 $r = R_{SC}$ 为半径的球面，其中 r 是奇点的距离）的物质都无法逃脱. 这里， R_{SC} 指的是史瓦西半径.

- (a) **模拟霍金辐射的起源:** 考虑一对粒子, 每个粒子的质量为 m , 在黑洞视界两侧产生. 其中一个粒子略微位于视界外, $r \approx R_{\text{SC}}$, 而另一个粒子位于视界内, $r = \kappa R_{\text{SC}}$. 假设粒子的总能量是其静止质量能量 mc^2 和黑洞引力势能之和.

确定使粒子对总能量为零的 κ 值. [4]

- (b) **黑洞的温度:** 如果在上述过程中在视界外产生的粒子具有足够的动能, 它可能通过一种称为霍金辐射的过程逃逸出黑洞. 而那个在视界内、具有负能量的粒子则被吸收, 从而减少黑洞的质量.

假设所有的霍金辐射都是由光子组成, 形成一个在波长 $\lambda_{\text{bb}} = 16R_{\text{SC}}$ 处达到峰值的黑体谱. 已知对于太阳质量的黑洞, $R_{\text{SC},\odot} = 2.952 \text{ km}$.

求出对应这种黑体辐射的黑洞温度 T_{bh} 的表达式. 用质量 M_{bh} 和物理常数来表示你的答案. 计算一个质量为 $10M_{\odot}$ 的黑洞的施瓦茨希尔德半径 $R_{\text{SC},10\odot}$ 和温度 $T_{\text{bh},10\odot}$. [4]

- (c) **黑洞的质量损失:** 假设霍金辐射是从事件视界发出的.

利用质能等价关系, 推导出质量损失率 $dM_{\text{bh}}(t)/dt$ 的表达式, 用黑洞的质量 $M_{\text{bh}}(t)$ 和物理常数表示.

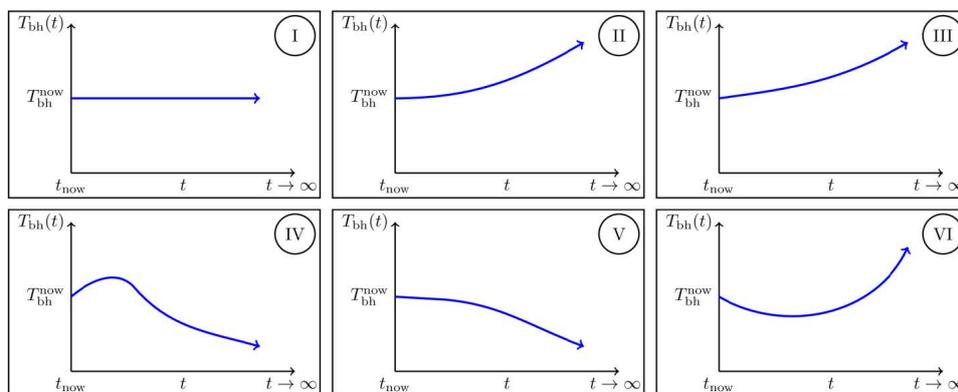
因此, 得到一个黑洞质量 $M_{\text{bh}}(t)$ 的表达式, 该黑洞初始质量为 M_0 . 绘制 $M_{\text{bh}}(t)$ 随时间 t 从 $M_{\text{bh}} = M_0$ 到 $M_{\text{bh}} = 0$ 的变化曲线. [8]

- (d) **黑洞的寿命:** 获得一个表达式, 表示初始质量为 M_0 的黑洞由于霍金辐射完全蒸发的时间 τ_{BH} , 用 M_0 和物理常数表示. 计算初始质量为 $M_0 = 10M_{\odot}$ 的黑洞的寿命 $\tau_{\text{BH},10\odot}$ (以秒为单位).

- (e) **黑洞在 CMB 辐射浴中:** 考虑一个在太空中孤立存在的黑洞, 远离其他天体. 该黑洞当前温度为 $T_{\text{bh}}^{\text{now}}$, 被当前温度为 $T_{\text{cmb}}^{\text{now}} = 2.7 \text{ K}$ 的宇宙微波背景 (CMB) 包围. 黑洞可以通过吸收 CMB 辐射来增加质量, 同时由于霍金辐射而失去质量.

考虑到宇宙的加速膨胀, 识别以下图中哪些图显示了 T_{bh} 在以下三种情况下的长期时间演化:

(X) $T_{\text{bh}}^{\text{now}} > T_{\text{cmb}}^{\text{now}}$, (Y) $T_{\text{bh}}^{\text{now}} = T_{\text{cmb}}^{\text{now}}$, (Z) $T_{\text{bh}}^{\text{now}} < T_{\text{cmb}}^{\text{now}}$.



将每个案例 X、Y 和 Z 与相应的图表匹配. 在总结答题纸中用表格表达你的答案, 每行只选一个框. [6]

- (2) 原初黑洞 (PBHs) 能够在极早期宇宙中形成, 其质量要小得多. 所有以下问题都与 PBHs 有关. 这里忽略任何增加黑洞质量的过程.

- (a) **PBH 在当前时代蒸发**: 正如您可能已经注意到的, 从之前问题的答案来看, 太阳质量的黑洞需要很长时间才能蒸发. 然而, 由于 PBH 可以具有远小于太阳质量的黑洞, 因此我们可能在当前时代看到它们蒸发.

找出一个可以在现在时代完全蒸发的黑洞的初始质量 $M_{0,\text{PBH}}$ (以千克为单位)、施瓦茨希尔德半径 $R_{\text{SC,PBH}}$ (以米为单位) 和温度 T_{PBH} (以开尔文为单位), 即寿命 $\tau_{\text{PBH}} = 140$ 亿年的一个黑洞. [4]

- (b) **PBH 的形成**: 在辐射主导的早期宇宙中, 尺度因子随时间变化为 $a(t) \sim t^{1/2}$. 在这个时期, PBH 形成于物理尺寸为 ct 的区域中所有能量的坍缩, 其中 t 是当时宇宙的年龄.

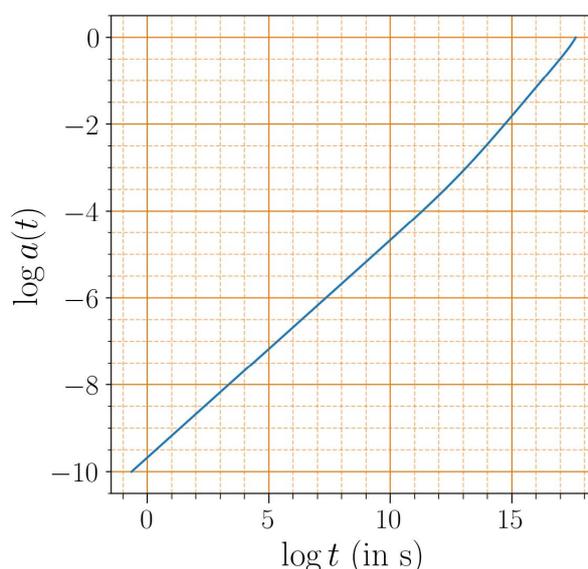
一个质量为 1×10^{12} kg 的原初黑洞在宇宙年龄约为 1×10^{-23} s 时形成. 计算当一个质量为 1×10^{20} kg 的原初黑洞形成时, 宇宙的年龄 t_{20} 是多少. [6]

- (c) **观测到的 PBH 霍金辐射光谱**: 考虑一个初始质量为 1×10^{10} kg 的 PBH, 在其寿命 τ_{PBH} 结束时完全蒸发. 对于这一部分, 假设大部分的霍金辐射是在此时发射的, 对应的温度与其初始质量有关. 将宇宙的尺度因子假设为按 $a(t) \sim t^{2/3}$ 演化.

计算此时霍金辐射在地球观测到的峰值波长 λ_{earth} , 在当前时代 ($t = 140$ 亿年). [5]

- (d) **来自 PBH 的高能宇宙辐射**: 现在假设在某一时刻发射的霍金辐射对应于能量为 $k_{\text{B}}T_{\text{bh}}(t)$ 的光子. 此外, 黑洞的最高可能温度是普朗克温度 T_{Planck} , 其中 $k_{\text{B}}T_{\text{Planck}} = 1 \times 10^{19}$ GeV.

尺度因子在相关时间尺度上的演化情况如下面的图所示. 当前的尺度因子被设定为 1. 时间轴上的 t (s) 表示宇宙的年龄, 单位为秒.



如果在地球上观测到一个能量为 $E_{\text{det}} = 3.0 \times 10^{20}$ eV 的光子, 确定可能负责该光子的 PBH 的初始质量的最大值和最小值 (分别表示为 M_0^{max} 和 M_0^{min}). [10]