球面三角

【引入】球面三角是研究球面三角形的边、角关系的一门学科。从十六世纪起由于天文学、航海学、测量学等方面的发展，球面三角逐渐形成了独立学科。在球面三角的研究中，由于各边长皆与半径成比例，边长间关系可以通过球心角建立，因此我们只需考虑各角及其三角函数间的转化。

壹、基本概念

一、角度制、弧度制及其互换，小角近似

1、角度制　弧度制

球面三角中，常要用到角度和圆弧的度量关系。从平面三角学我们知道，一圆周的$\frac{1}{360}$，叫做 1 度的弧。

角和弧的量度单位，常用的有两种：

(1)、角度：长度与大圆周长的$\frac{1}{360}$相等的圆弧所对的圆心角，叫做 1°；

(2)、弧度：长度和半径相等的圆弧所对的圆心角，叫做 1 弧度（rad）。

2、转化

由于一圆周的长度等于 2π 个圆半径的弧长，根据以上弧度的定义，得到弧度和度的关系如下：

$$2\pi\ \text{rad}=360°$$

$$1\text{rad}=\frac{180°}{\pi}=57.3°=3438'=206265''$$

或者

$$1°=\frac{1}{57.3}\text{rad}$$

$$1'=\left(\frac{1}{60}\right)°=\frac{1}{3438}\text{rad}$$

$$1''=\left(\frac{1}{60}\right)'=\frac{1}{206265}\text{rad}$$

3、小角近似

在实际运用中，尤其是天文学的研究计算当中，我们经常会遇到需要处理小角的情况。一般来说，如果能将其三角函数形式转化为其他对等的形式更为简单的函数（如低次多项

式），那么可能会给计算带来极大的方便。

小角近似　对于小角 θ，有

$$\lim_{\theta\to 0}\sin\theta=\lim_{\theta\to 0}\tan\theta=\theta$$

$$\lim_{\theta\to 0}\cos\theta=1$$

而对于很小的角，我们有

$$\sin\theta\approx\tan\theta\approx\theta \qquad \cos\theta\approx 1$$

证明　将一个函数写成多项式相加的方法，我们首先想到的是泰勒公式

$$f(x)=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x-x_0)^i=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\cdots$$

又我们研究的是很小的角，于是考虑在 0 附近展开 $\sin\theta$、$\cos\theta$ 和 $\tan\theta$，这时可以用麦克劳林公式

$$f(x)=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{f^{(i)}(0)}{i!}x^i=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots$$

展开 $\sin\theta$、$\cos\theta$ 与 $\tan\theta$，得

$$\sin\theta=\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i\frac{1}{(2i+1)!}\theta^i=\theta-\frac{1}{3!}\theta^3+\frac{1}{5!}\theta^5-\frac{1}{7!}\theta^7+\cdots+(-1)^n\frac{1}{(2n+1)!}\theta^n+\cdots$$

$$\cos\theta=\sum_{i=1}^{\infty}(-1)^{i-1}\frac{1}{(2i-2)!}\theta^{2i-2}=1-\frac{1}{2!}\theta^2+\frac{1}{4!}\theta^4-\frac{1}{6!}\theta^6+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{(2n-2)!}\theta^{2n-2}+\cdots$$

$$\tan\theta=\theta+\frac{1}{3}\theta^3+\frac{2}{15}\theta^5+\frac{17}{315}\theta^7+\frac{62}{2835}\theta^9+\cdots$$

鉴于 θ 为小角，上式中可略去高阶小量，得

$$\sin\theta\approx\tan\theta\approx\theta \qquad \cos\theta\approx 1$$

※4、其他近似

除了小角近似外，我们还可能遇到其它类型的不易化简的函数，如果把它们也能近似成较为简单的多项式相加，会给我们带来便利。

基本上，我们做近似都是使用麦克劳林公式

$$f(x)=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{f^{(i)}(0)}{i!}x^i=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots$$

把后面的高次项略去得到近似式；而我们略去的只能是高阶小量，因此这种方法一般用来处理小量的近似（如上面的小角近似）。

下面我们直接给出部分函数在 x 极小（准确来说是 $x\to 0$）时的近似，它们都可以用麦克劳林公式展开略去高阶项得到。

$$(1+x)^n \approx 1+nx$$

$$\ln(1+x) \approx x$$

$$e^x \approx 1+x$$

二、球面上的圆

从立体几何学得知，通过球心的平面截球面所得的截口是一个圆，叫做**大圆**；不通过球心的平面截球面所得的截口也是一个圆，叫做小圆。通过球面上不在同一直径两端的两个点，能做并且只能做一个大圆。

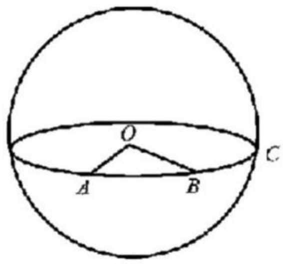

图 1 经过球面上任意两点 A、B 可做一大圆

例如通过图 1 中的任意两点 A 和 B，也仅可以做一个大圆⊙ABC。A、B 两点间的大圆弧（小于 180°的那段弧）用角度计量，叫做 A、B 间的角距，记为 $\overset{\frown}{AB}$，它等于大圆弧 $\overset{\frown}{AB}$ 所对的中心角 $\angle AOB$。

三、球面上圆的极

设⊙ABC 为球面上的一个任意圆（图 2），它所在的平面为 $MABC$，又设 PP'为垂直于平面 $MABC$ 的球直径，则它的两个端点 P 和 P'叫做⊙ABC 的极。如果用一句话来表达，可以这样说：垂直于球面上一已知圆（不论大圆或小圆）所在平面的球直径的端点，叫做这个圆的**极**。

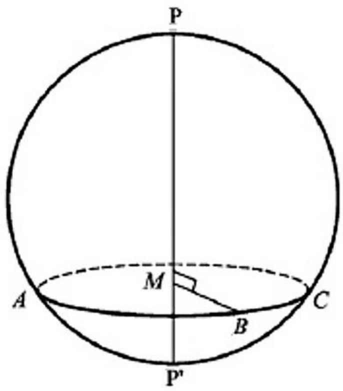

图 2　球面上圆的极 P 与 P'

球面上某一圆的极和这个圆上任一点的角距，叫做极距。可以证明，极到圆上各点的角距都是相等的；如果所讨论的圆是一个大圆的话，则极距为 90°。

四、球面角

两个大圆弧相交所成的角，叫做**球面角**。它们的交点叫做球面角的顶点。大圆弧本身叫做球面角的边。图3绘出了两个相交的大圆弧 $\overparen{PA}$ 和 $\overparen{PB}$，O 为球心，$\overparen{PA}$ 所在的平面为 POA，$\overparen{PB}$ 所在的平面为 POB，两者的交线为 OP。球面角 $\angle APB$ 用 POA 和 POB 所构成的两面角来量度。在图 3 中做以 P 为极的大圆 $\odot QQ'$，设 $\overparen{PA}$（或其延线）和 $\odot QQ'$ 相交于 A'，$\overparen{PB}$（或其延线）和 $\odot QQ'$ 相交于 B'，则由于 P 为 $\odot QQ'$ 的极，所以 OP 垂直于平面 QQ'，因而也垂直于 OA' 和 OB'，所以 $\angle A'OB'$ 就是平面 POA 和 POB 所构成的两面角。即：球面角 $\angle APB$ 可以用 $\angle A'OB'$ 量度，又因为 $\angle A'OB'$ 可以用 $A'B'$ 量度，所以最后得到的球面角 $\angle APB$ 是以 $\overparen{A'B'}$ 弧量度的。

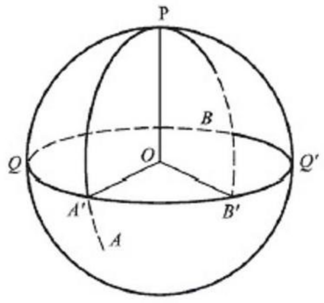

图 3　球面角的量度

从上面的讨论可以概括出下述结果：如果以球面角的顶点为极作大圆，则球面角的边或其延长线在这个大圆上所截取的那个弧段便是球面角的数值。

五、球面三角形

把球面上的三个点用三个大圆弧联结起来，所围成的图形叫做**球面三角形**。这三个大圆弧叫做球面三角形的边，通常用小写拉丁字母 a、b、c 表示；这三个大圆弧所构成的角叫做球面三角形的角，通常用大写拉丁字母 A、B、C 表示，并且规定：A 角和 a 边相对，B 角和 b 边相对，C 角和 c 边相对（如图 4 所示）。三个边和三个角合称球面三角形的六个元素。

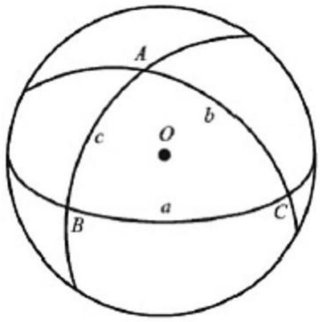

图 4　球面三角形

贰、球面三角学基本公式

一、极三角形

1、概念

设球面三角形 ABC 各边 a、b、c 的极分别为 A'、B'、C'（图 5），并设弧 $\overset{\frown}{A'B'}$、$\overset{\frown}{BB'}$、$\overset{\frown}{CC'}$ 都小于 90°，则由通过 A'、B'、C'的大圆弧构成的球面三角形 $A'B'C'$叫做原球面三角形的**极三角形**。

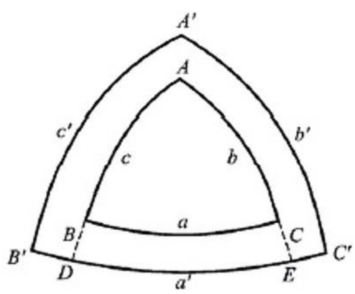

图 5　极三角形

2、极三角形定理

极三角形和原三角形有着非常密切的关系，这种关系存在着两条定理。

定理 1　如果一球面三角形为另一球面三角形的极三角形，则另一球面三角形也为这一球面三角形的极三角形

定理 2　极三角形的边和原三角形的对应角互补；极三角形的角和原三角形的对应边互补

证明　B′是 b 的极（图 5），C'是 c 的极，所以有：

$$\overset{\frown}{B'E}=\overset{\frown}{C'D}=90° \qquad \overset{\frown}{B'E}+\overset{\frown}{C'D}=180°$$

即

$$\overset{\frown}{B'C'}+\overset{\frown}{DE}=180°$$

但由定理 1，A 是 $\overset{\frown}{B'C'}$ 的极，故有 $\overset{\frown}{DE}=A$，将此式以及 $\overset{\frown}{B'C'}=a'$代人上式，便得到

$$a'+A=180° \tag{1.1}$$

（1.1）式即定理 2 的前半的证明。定理 2 的后半不需证明；因为实际上，它只是定理 1 和定理 2 的前半的一个推论。

二、边基本性质

性质 1　球面三角形两边之和大于第三边

证明　将球面三角形 ABC 的顶点和球心 O 连结起来（图 6），由立体几何得知：三面角的两个面角之和大于第三个面角，即

$$\angle AOB+\angle BOC>\angle AOC$$

故

$$c+a>b$$

同理　$a+b>c \qquad a+c>b$

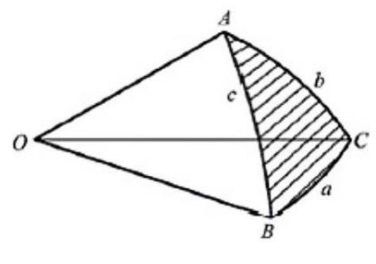

图 6　球面三角形两边之和大于第三边

推理　球面三角形两边之差小于第三边

性质 2　球面三角形三边之和大于 0°而小于 360°

证明　因为 a，b，c 均为正，故 $a+b+c>0°$，又由立体几何得知凸多面角各面角之

和小于 360°，因此

$$\angle AOB+\angle BOC+\angle COA<360°$$

$$0<a+b+c<360°$$

性质 3　球面三角形三角之和大于 180°而小于 540°

证明　由极三角形和原三角形的关系得：

$$a'+A=180°$$

$$b'+B=180°$$

$$c'+C=180°$$

即

$$A+B+C=540°—(a'+b'+c')$$

但根据定理 2 有

$$0°<a'+b'+c'<360°$$

所以上式化为

$$180°<A+B+C<540°$$

除了上述三个基本性质以外，还有两个重要的基本性质；对于这两个性质，我们只写出结果，而不给出证明。

性质 4　若球面三角形的两边相等，则这两边的对角也相等。反之，若两角相等，则这两角的对边也相等

性质 5　在球面三角形中，大角对大边，大边对大角

三、六个基本公式

下面我们要推导出六个基本公式，它们全是针对三个边都小于 90°的球面三角形导出的，但是能够证明所得公式适用于任何球面三角形。

1、边的余弦公式

边的余弦公式　对任意球面三角形 ABC，任意边的余弦等于其他两边余弦的乘积加上这两边的正弦及其夹角余弦的连乘积，即

$$\cos a=\cos b\cdot\cos c+\sin b\cdot\sin c\cdot\cos A$$

$$\cos b=\cos c\cdot\cos a+\sin c\cdot\sin a\cdot\cos B$$

$$\cos c=\cos a\cdot\cos b+\sin a\cdot\sin b\cdot\cos C$$

证明　　取球面三角形 ABC，将各顶点与球心 O 连结，可得一球心三面角 O-ABC（图 7）。

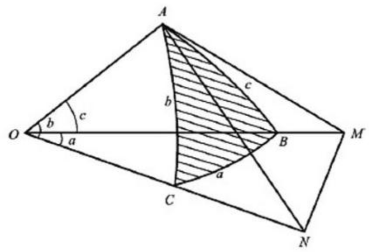

图 7　推导余弦公式的图

过顶点 A 做 b、c 边的切线，分别交 OC，OB 的延长线于 N、M，由此得到两个平面直角三角形 OAM、OAN 和两个平面普通三角形△OMN、△AMN。

在平面△OMN 中，应用平面三角的余弦定理，得

$$MN^2=OM^2+ON^2-2OM\cdot ON\cdot\cos a$$

同理，在平面△AMN 中，得

$$MN^2=AM^2+AN^2-2AM\cdot AN\cdot\cos A$$

因此

$$OM^2+ON^2-2OM\cdot ON\cdot\cos a = AM^2+AN^2-2AM\cdot AN\cdot\cos A$$

即

$$2OM\cdot ON\cdot\cos a = (ON^2-AN^2)+(OM^2-AM^2)+2AM\cdot AN\cdot\cos A$$
$$=OA^2+OA^2+2AM\cdot AN\cdot\cos A$$

或

$$\cos a=\frac{OA}{ON}\cdot\frac{OA}{OM}+\frac{AN}{ON}\cdot\frac{AM}{OM}\cdot\cos A$$

将

$$\frac{OA}{ON}=\cos b \qquad \frac{OA}{OM}=\cos c$$
$$\frac{AN}{ON}=\sin b \qquad \frac{AM}{OM}=\sin c$$

代入上式，便得到

$$\cos a=\cos b\cdot\cos c+\sin b\cdot\sin c\cdot\cos A$$

其余两边同理

2、角的余弦公式

角的余弦公式　对任意球面三角形 ABC，任一角的余弦等于其它两角余弦的乘积

冠以负号加上这两角的正弦及其夹边余弦的连乘积，即

$$\cos A=-\cos B\cdot\cos C+\sin B\cdot\sin C\cdot\cos a$$

$$\cos B=-\cos A\cdot\cos C+\sin A\cdot\sin C\cdot\cos b$$

$$\cos C=-\cos A\cdot\cos B+\sin A\cdot\sin B\cdot\cos c$$

证明　　设球面三角形 ABC 的极三角形为 $A'B'C'$，则按照边的余弦公式有

$$\cos a'=\cos b'\cdot\cos c'+\sin b'\cdot\sin c'\cdot\cos A'$$

因为

$$a'=180°-A \qquad b'=180°-B$$

$$c'=180°-C \qquad A'=180°-a$$

所以上式化为

$$-\cos A=\cos B\cdot\cos C-\sin B\cdot\sin C\cdot\cos a$$

即

$$\cos A=-\cos B\cdot\cos C+\sin B\cdot\sin C\cdot\cos a$$

其余两角同理

3、正弦公式

正弦公式　球面三角形各边的正弦和对角的正弦成正比，即

$$\frac{\sin a}{\sin A}=\frac{\sin b}{\sin B}=\frac{\sin c}{\sin C}$$

证明　　取球面三角形 ABC，做球心三面角 $O\text{-}ABC$。过 C 点做 OAB 平面的垂线交此平面于 D（图 8），再从 D 向 OA、OB 引垂线 DE，DF。连接 CE 和 CF；由此得四个平面三角形△OEC、△OFC、△CDE、△CDF。因 CD 垂直于平面 OAB，$DE\perp OA$，所以 $OA\perp CE$；同理 $OB\perp CF$，因此，四个平面三角形△OEC、△OFC、△CDE、△CDF 都是直角三角形，并且有 $\angle CED=A$，$\angle CFD=B$。

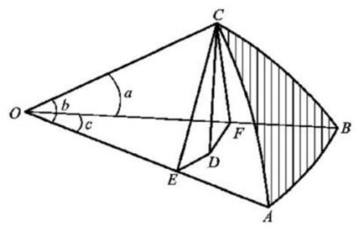

图 8　推导正弦公式的图

从图 8 可得

$$\frac{\sin a}{\sin A}=\frac{\frac{CF}{OC}}{\frac{CD}{CE}}=\frac{CF\cdot CE}{OC\cdot CD}$$

$$\frac{\sin b}{\sin B}=\frac{\frac{CE}{OC}}{\frac{CD}{CF}}=\frac{CF\cdot CE}{OC\cdot CD}$$

因得

$$\frac{\sin a}{\sin A}=\frac{\sin b}{\sin B}$$

利用轮换变更字母法，可以得出其它两个类似的式子，最后得

$$\frac{\sin a}{\sin A}=\frac{\sin b}{\sin B}=\frac{\sin c}{\sin C}$$

4、第一五元素公式

由边的余弦公式有：

$$\cos a=\cos b\cdot\cos c+\sin b\cdot\sin c\cdot\cos A$$

$$\cos b=\cos c\cdot\cos a+\sin c\cdot\sin a\cdot\cos B$$

第二个式子可以改写为

$$\sin c\cdot\sin a\cdot\cos B=\cos b-\cos c\cdot\cos a$$

将第一个式子代入上式的右边，得

$$\sin c\cdot\sin a\cdot\cos B=\cos b-\cos c\cdot(\cos b\cdot\cos c+\sin b\cdot\sin c\cdot\cos A)$$

$$=\cos b-\cos b\cdot\cos^2 c-\sin b\cdot\sin c\cdot\cos c\cdot\cos A$$

$$=\cos b\cdot\sin^2 c-\sin b\cdot\sin c\cdot\cos C\cdot\cos A$$

将上式两端各除以 $\sin c$，便得到

$$\sin a\cdot\cos B=\cos b\cdot\sin c-\sin b\cdot\cos c\cdot\cos A \tag{1.2}$$

同理，得

$$\sin a\cdot\cos C=\cos c\cdot\sin b-\sin c\cdot\cos b\cdot\cos A \tag{1.3}$$

其他类似的式子可以从(1.2)式或(1.3)式，利用轮换变更字母法得出。(1.2)式或(1.3)式都是**第一五元素公式**，它具有一定的规律，但是它的文字表达式很繁琐，因此这里不写出来。

5、第二五元素公式

利用极三角形和原三角形的关系（定理 2），可以导出下列两个公式：

$$\sin A\cdot\cos b=\cos B\cdot\sin C+\sin B\cdot\cos C\cdot\cos a \tag{1.4}$$

$$\sin A\cdot\cos c=\cos C\cdot\sin B+\sin C\cdot\cos B\cdot\cos a \tag{1.5}$$

其它类似的式子可以从（1.4）式或（1.5）式，利用轮换变更字母法得出，（1.4）或（1.5）式都是**第二五元素公式**。它的文字表达式也没有必要写出来。

6、四元素公式

把第一五元素公式和正弦公式联合起来，可以导出球面三角形中相邻的四个元素的关系式，即：

$$\cot A\cdot\sin C=-\cos C\cdot\cos b+\sin b\cdot\cot a \tag{1.6}$$

$$\cot A\cdot\sin B=-\cos B\cdot\cos c+\sin c\cdot\cot a \tag{1.7}$$

其他类似的式子，可以从（1.6）式或（1.7）式利用轮换变更字母法得出。

叁、拓展

一、直角球面三角形

1、直角球面三角形公式

有一个角等于 90°的球面三角形叫做**直角球面三角形**。设球面三角形 ABC 中，C=90°，且 $\cos C$=0，$\sin C$=1，将它们代入以上各公式，经过适当的变换，可得下列常用的直角三角形公式：

$$\begin{array}{ll} \cos c = \cos a\cdot\cos b & \sin b = \sin c\cdot\sin B \\ \sin a = \sin c\cdot\sin A & \sin b = \tan a\cdot\cot A \\ \sin a = \tan b\cdot\cot B & \cos c = \cot A\cdot\cot B \\ \cos B = \tan a\cdot\cot c & \cos A=\tan b\cdot\cot c \\ \cos B = \cos b\cdot\sin A & \cos A=\cos a\cdot\sin B \end{array} \tag{1.8}$$

2、纳皮尔法则

为了便于记忆这十个直角三角形公式，聂比尔提出了一条很有用的定则。除掉直角 C，用（90°－a）和（90°－b）分别代替夹直角的两个边 a 和 b，然后把所得的五个元素依序排成一个圆（如图 9 所示）；这样，每个元素有两个相邻元素和两个相对元素。聂比尔定则为：每个元素的余弦等于两相邻元素的余切的乘积或者等于两相对元素的正弦的乘积。例如，当所选元素为 C 时根据定则的前半得 $\cos c=\cot A\cdot\cot B$，这就是（1.8）式里的第六式。根据定则的后半得 $\cos c=\sin(90°-b)\cdot\sin(90°-a)=\cos a\cdot\cos b$，这就是（1.8）式里

的第一式。

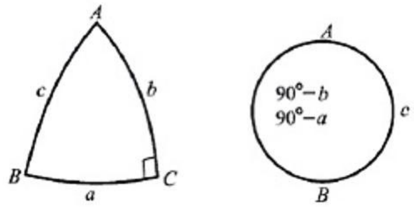

图 9 用聂比尔定则记直角球面三角十公式

二、球面多边形

1、简介

在球面上，由大圆的弧所包围的区域称为球面多边形，但要注意，不同于平面上的情形，在球面上'双角'是可能存在的。(两个弧夹出两个角的三角形类似物)(可由剥橘子时剥下来的橘子皮想像)

这些多边形的边长(弧长)，可以利用球心角很方便的来测定，将弧的两端所对应的球心角乘上半径便是边长。要注意的是，这些角都必须用径度量来量度。.

因此，对一个球面三角形而言，是由其弧长与球心角来具体描述的，只是弧的长度是用径度量来标示。

2、球面剩馀　高斯-邦奈定理

球面三角形的三个内角的和总是大于 180°，但在平面上只有 180°。超过 180°的数值称为**球面剩馀** E：$E = \alpha + \beta + \gamma$ -180°，这些结馀给出了球面三角形的面积。确定这个值，球面剩馀必须以径度量来测定。

高斯-邦奈定理　球面三角形表面积 A 依据球面的半径和球面剩馀来测量：

$$A = E \cdot R^2$$

这很明显的显示没有相似的球面三角形(三角形有相同的角，但边长和面积不同)。而在特殊的情况下，球的半径为 1，则球面三角形的面积 $A = E$。

要解球面几何的问题，要点是能剖析出其中的直角三角形(三个角中有一个是 90°)，因为这样就可以利用纳皮尔的多边形求解。

相邻两角度的馀切的乘积相对两角度的正弦的乘积可以参考半正矢(Haversine formula)，能在球面三角上解析弧长与角度，为航海学提供了稳定的模式。

3、球面角超

球面三角形三内角之和与平面三角形三内角之和的差叫做**球面角超** ε，即：

$$\varepsilon=A+B+C-180°$$

球面角超ε的计算公式：

$$\varepsilon=\frac{S}{R^2}$$

式中．S 为球面三角形的面积；R 为球的半径。

如上例，球面三角形三个角都是 90°($\frac{\pi}{2}$rad)时．其面积为整个球面的 $\frac{1}{8}$，球面积为 $4\pi R^2$．其 $\frac{1}{8}$ 为 $\frac{\pi R^2}{2}$．代入式 $\varepsilon=\frac{S}{R^2}$ 可求出该球面三角形的球面角超为 $\frac{\pi}{2}$。与用式 $\varepsilon=A+B+C-180°$ 计算结果一致。