

# 第十八屆國際天文與天體物理奧林匹克競賽

## 數據分析試題

印度·孟買 2025 年 8 月 17 日

### 1. 系外行星 30 年

[90 分]

這個問題探討了系外行星探測的兩種主要方法的一些方面：徑向速度法和凌日法。在整個問題中，我們將考慮一個特定的系統，該系統包含一顆繞太陽型恆星（S）運行的單行星（P），其軌道為圓形，半徑為  $a$ 。我們將把這個系統稱為「SP 系統」。

#### 恆星參數

- (1) 恆星 S 的 V 波段視星等為  $(7.65 \pm 0.03)$  等，視差為  $(20.67 \pm 0.05)$  毫角秒，熱改正（BC）為  $-0.0650$  等。因此，這顆恆星的全波段光度高於其在 V 波段的光度。

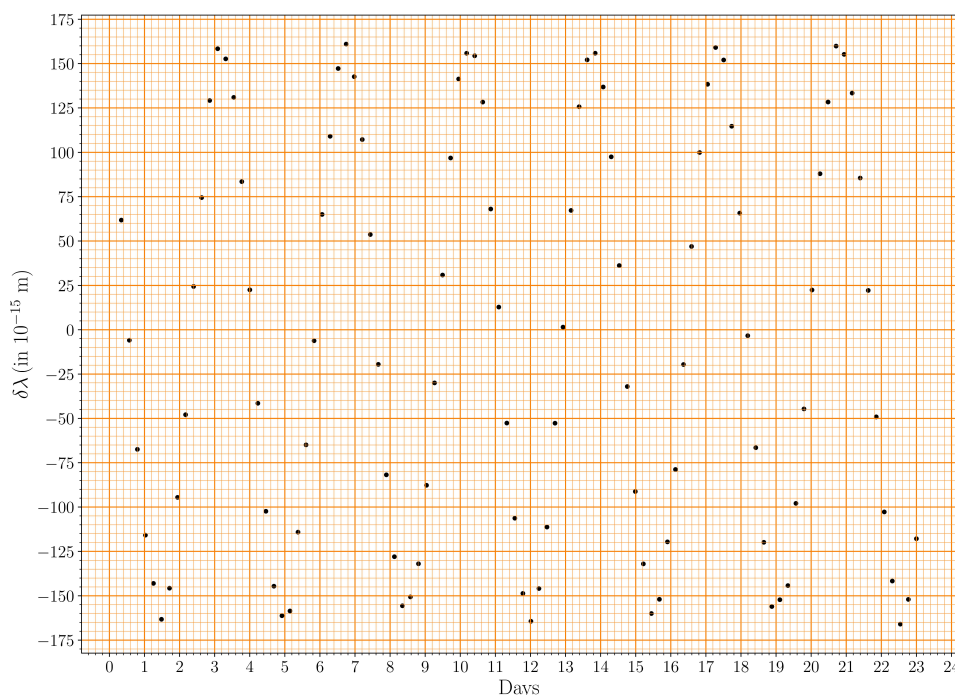
估計恆星的質量  $M_s$ （以  $M_\odot$  為單位），假設質量-光度（ $M-L$ ）關係為  $L \propto M^4$ 。同時估計  $M_s$  的不確定性。你可能需要使用  $\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}$ 。

[8]

#### 徑向速度法

徑向速度法利用已知光譜綫的觀測波長  $\lambda_{\text{obs}}$  與靜止波長  $\lambda_0$  之間的多普勒位移  $\delta\lambda \equiv \lambda_{\text{obs}} - \lambda_0$  來探測系外行星並確定其特性。

下圖顯示了 SP 系統中觀測到的 Fe I 綫（ $\lambda_0 = 543.45 \times 10^{-9} \text{ m}$ ）的  $\delta\lambda$  隨時間的變化情況。



徑向速度半幅  $K$  定義為  $K \equiv (v_{r, \text{max}} - v_{r, \text{min}})/2$ ，其中  $v_{r, \text{max}}$  和  $v_{r, \text{min}}$  分別表示徑向速度的最大值和最小值。對於一個圓形行星軌道，半幅  $K$  可以表示為：

$$K = \left( \frac{2\pi G}{T} \right)^{1/3} \frac{M_p \sin i}{(M_p + M_s)^{2/3}},$$

其中  $T$  是週期， $i$  是行星軌道的傾角（行星軌道平面法綫與觀測者視線之間的夾角）， $M_p$  和  $M_s$  分別是行星和恆星的質量。

(2) 使用總結答題紙中的圖表來回答以下問題。

(2a) 繪制與圖中所示觀測數據相關的平滑曲綫。 [2]

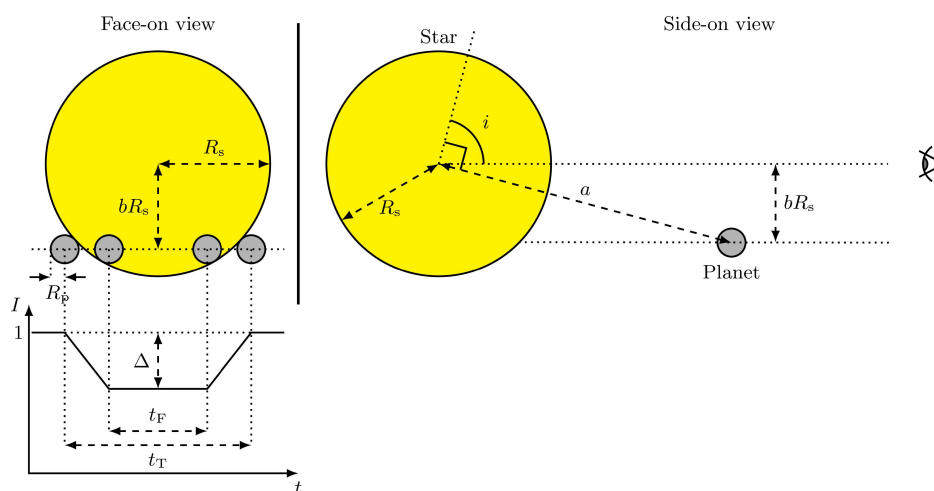
(2b) 在你繪制的曲綫上選擇適當的點，並使用合適的方法確定  $T$  和  $K$  及其相應的不確定度。所有用於計算  $T$  和  $K$  的數據點必須在總結答題紙的表格中顯示。使用表格的其餘部分展示所需的中間計算，並添加適當的標題。 [11]

(2c) 找出行星的最小質量  $M_{p, \min}$ （以  $M_\odot$  為單位）及其相應的不確定度，假設  $M_p \ll M_s$ 。 [5]

(2d) 使用 (2c) 中估計的  $M_{p, \min}$  值，計算行星軌道的半長軸最小值  $a_{\min}$  及其不確定度，單位為 AU。 [4]

### 凌日法（無周邊昏暗）

下面顯示了一個行星凌日的示意圖（未按比例）。最初，我們將假設恆星盤具有均勻的平均強度，並且恆星本身存在一些固有的噪聲。



歸一化強度  $I$  隨時間  $t$  變化的光變曲綫如上圖的凌日示意圖所示。將凌日之外的恆星強度取為 1。歸一化光變曲綫中強度的最大下降量由  $\Delta$  表示。對於一個均勻發光的恆星盤，行星半徑  $R_p$  與  $\Delta$  的關係為

$$\left(\frac{R_p}{R_s}\right)^2 = \Delta,$$

其中  $R_s$  是恆星的半徑。

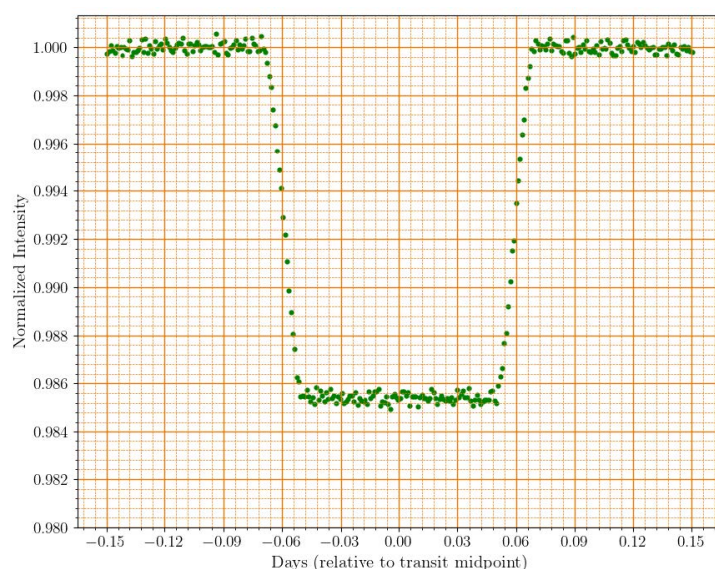
凌星的總持續時間（行星部分或全部遮擋恆星盤）由  $t_T$  表示，而  $t_F$  表示當行星完全位於恆星盤前方時的持續時間。「碰撞參數」 $b$  是在凌星中點時，行星與恆星盤中心之間的投影距離，以恆星半徑  $R_s$  為單位。

對於一個接近邊沿視方向的恆星-行星軌道，碰撞參數由以下公式給出

$$b = \left[ \frac{\left(1 - \sqrt{\Delta}\right)^2 - (t_F/t_T)^2 \left(1 + \sqrt{\Delta}\right)^2}{1 - (t_F/t_T)^2} \right]^{1/2}.$$

- (3) 對於 SP 系統，恆星半徑已知為  $R_s = 1.20R_\odot$ ，並且行星的凌日現象確實可觀測。使用在 (2d) 中估計的最小軌道半徑  $a_{\min}$ ，求出傾角的最小值  $i_{\min}$ 。 [3]

假設恆星盤亮度均勻，凌日光變曲線將如下面所示。



- (4) 使用給定的光變曲線回答以下問題。為供參考，上述光變曲線也包含在總結答題紙中。

(4a) 通過在圖上標記適當的讀數來估算  $t_T$  和  $t_F$  的值（以天為單位）。 [3]

(4b) 估計  $\Delta$  的平均值，通過在圖上標記適當的讀數，從而找到  $R_p$  的單位為  $R_\odot$  的值。

[2]

(4c) 確定  $i$  的值（以度為單位），假設軌道半徑為  $a_{\min}$ 。 [2]

### 引入周邊昏暗

到目前為止，我們假設恆星盤是均勻發光的。實際上，由於「周邊昏暗」——這是一種光學效應，恆星盤的中心部分比邊緣部分更明亮——所觀察到的恆星盤亮度並不均勻。

周邊昏暗效應可以通過相對強度  $J(\theta) \equiv \frac{I(\theta)}{I(0)}$  來測量，其中  $\theta$  是星體表面某點的法綫與觀測者到該點連線之間的夾角， $I(\theta)$  是該點觀測到的星體盤面的強度（ $I(0)$  為星體盤面中心的強度）。對於遠處的觀測者， $\theta$  從  $\theta = 0$ （盤面中心）變化到  $\theta \approx 90^\circ$ （盤面邊緣）。

- (5) 下表給出了太陽在某一波長處的  $J(\theta)$  測量值。我們將假設恆星 S 具有相同的周邊昏暗曲綫。

$\theta$	$J(\theta)$	$\theta$	$J(\theta)$	$\theta$	$J(\theta)$	$\theta$	$J(\theta)$
0°	1.000	20°	0.971	40°	0.883	70°	0.595
10°	0.994	25°	0.950	50°	0.794	80°	0.475
15°	0.984	30°	0.943	60°	0.724	90°	0.312

周邊昏暗曲綫可以用一個二次公式來建模：

$$J(\theta) = 1 - a_1(1 - \cos \theta) - a_2(1 - \cos \theta)^2,$$

其中  $a_1$  和  $a_2$  是兩個常數。

我們將從給定的數據中通過使用合適的變量作圖來估計未知系數  $a_1$  和  $a_2$ 。

(5a) 選擇一對變量  $(x_1, y_1)$ ，它們是  $\theta$  和  $J$  的合適函數，分別用於沿  $x$  軸和  $y$  軸繪制，以確定  $a_1$  和  $a_2$ 。寫出  $x_1$  和  $y_1$  的表達式。 [2]

如果你需要為其他圖表定義額外的變量，請將它們定義為  $(x_2, y_2)$  等。

(5b) 列出你圖表所需的數值。 [4]

(5c) 在給定的坐標紙上繪制新定義的變量（將你的圖表標記為「(5c)」）。 [7]

(5d) 從圖中獲取  $a_1$  和  $a_2$ 。不需要考慮數值的誤差。 [7]

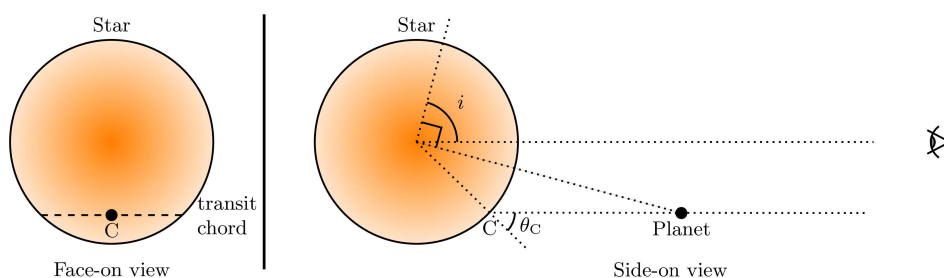
### 存在周邊昏暗的凌日

現在，我們考慮行星穿越一個邊緣變暗的恆星盤。在存在周邊昏暗的情況下，我們將通過上述的  $J(\theta)$  二次公式進行建模，整個恆星盤（沒有發生任何凌日）的平均觀測到的光度  $\langle I \rangle$  為：

$$\langle I \rangle = \left(1 - \frac{a_1}{3} - \frac{a_2}{6}\right) I(0).$$

此外，由於行星凌日造成的光度下降不僅取決於行星和恆星的相對大小  $\left(\frac{R_p}{R_s}\right)$ ，還取決於恆星盤在凌日軌道弦上的強度分布，而這種強度分布又取決於軌道傾角  $i$ 。

下圖（比例不準確）顯示了構型情況。請注意，恆星較亮的部分顯示為較暗的色調，而行星則顯示為一個黑點。



此處  $\frac{R_p}{R_s}$  與從光變曲綫測得的  $\Delta$  之間的關係是

$$\Delta = \frac{I(\theta_C)}{\langle I \rangle} \left(\frac{R_p}{R_s}\right)^2,$$

其中  $I(\theta_C)$  是恆星盤在凌日弦綫中點（圖中點 C）的強度， $\theta_C$  為該點視線方向與表面法綫之間的夾角。從上面可以看出，對於某一特定恆星，相同的  $\Delta$  值可以通過行星半徑  $R_p$  和傾角  $i$  的多種組合產生。

- (6) 可以通過來自兩個波長（例如， $\lambda_B$ （藍光）和  $\lambda_R$ （紅光））的凌日光變曲綫數據唯一地確定  $R_p$  和  $i$ 。這兩個波長的周邊昏暗系數如下：

波長	$a_1$	$a_2$
$\lambda_B$	0.82	0.05
$\lambda_R$	0.24	0.20

- (6a) 在以下選項中選擇正確描述  $\lambda_B$  的凌日最大深度 ( $\Delta$ ) 與軌道傾角 ( $i$ ) 關係的陳述，並在總結答案紙上打勾 (✓)。

[2]

- (A)  $\Delta$  隨著  $i$  減小而增加。  
 (B)  $\Delta$  隨著  $i$  減小而減小。  
 (C)  $\Delta$  與  $i$  無關。

- (6b) 「SP 系統」的凌日深度 ( $\Delta$ ) 分別在  $\lambda_B$  和  $\lambda_R$  波段測得為 0.0182 和 0.0159。

在給定的網格上繪制  $\lambda_B$  和  $\lambda_R$  的示意凌日光變曲綫，並分別用「B」和「R」標記這些曲綫。假設兩種波長的總凌日持續時間相同。曲綫不需要按比例繪制，但應正確表示光變曲綫的形狀。

[4]

- (7) 我們將採用圖形方法，通過在  $\lambda_B$  和  $\lambda_R$  處測量  $\Delta$  來確定 SP 系統中的  $R_p$  和  $i$  值。

- (7a) 寫出一個適當的表達式，關聯要繪制的相關變量。(提示：你可以考慮  $i$ 、 $R_p$  和  $R_s$  等相關的變量。)

[6]

- (7b) 列出要繪制的適當量的數據。

[5]

- (7c) 繪制一個合適的圖表並標記為「(7c)」。

[7]

- (7d) 從圖中估計  $R_p$ （單位為  $R_\odot$ ）和  $i$ （單位為度）的值。

[4]

- (8) 根據本題獲得的結果，在總結答題卡上勾選 (✓) 適當的框，以表明行星 P 是「岩石型」還是「氣體型」。

[2]

## 2. 預測日冕物質拋射到達地球的時間

[60 分]

太陽偶爾會釋放出磁化等離子體，稱為日冕物質噴射 (CME)，這些物質來源於太陽表面並向外傳播。準確預測它們到達地球的時間對於理解並減輕它們對地球軌道衛星的潛在影響至關重要。在這個問題中，我們旨在通過建立一個經驗模型，利用 10 個 CME 的數據來預測它們的到達時間。在整個問題中，假設太陽表面到地球的距離為  $214R_\odot$ 。此外，假設太陽能保持靜止。由於電磁力、引力和阻力，CME 在傳播過程中經歷可變的加速度。在這個問題的前兩個部分中，我們假設太陽和地球之間的區域是真空。

### 通過真空的 CME

- (1) 10 次 CME 的初始速度  $u$ （在太陽表面，即  $1R_\odot$  處）、到達地球時的最終速度  $v$ ，以及離開太陽表面後到達地球所需的時間（以小時為單位） $\tau$ ，如下表所示。

CME 名稱	$u$ (km s <sup>-1</sup> )	$v$ (km s <sup>-1</sup> )	$\tau$ (h)
CME-A	804	470	74.5
CME-B	247	360	127.5
CME-C	523	396	103.5
CME-D	830	415	71.0
CME-E	665	400	104.5
CME-F	347	350	101.5
CME-G	446	375	99.5
CME-H	155	360	97.0
CME-I	1016	515	67.0
CME-J	683	410	54.0

(1a) 計算每個 CME 的平均加速度  $a$ ，單位為 m s<sup>-2</sup>。 [3]

(1b) 我們假設一個經驗模型來描述 CME 的加速度  $a_{\text{model}}$ ，它依賴於其初始速度  $u$ ，表達式為  $a_{\text{model}} = m\left(\frac{u}{u_0}\right) + \alpha$ ，其中， $a_{\text{model}}$  的單位是 m s<sup>-2</sup>， $u$  的單位是 km s<sup>-1</sup>， $u_0 = 1.00 \times 10^3$  km s<sup>-1</sup>。

用適當的圖確定常數  $m$  和  $\alpha$  及其相關不確定度（將你的圖標記為「(1b)」）。 [15]

(1c) 對於每個 CME，列出加速度的模型值  $a_{\text{model}}$ （單位為 m s<sup>-2</sup>）。然後計算計算出的加速度  $a$  與模型值  $a_{\text{model}}$  之間的均方根（rms）偏差  $\delta a_{\text{rms}}$ 。 [4]

(2) 我們考慮另外兩個 CME：CME-1 和 CME-2，它們的初始速度分別為  $u = 1044$  km s<sup>-1</sup> 和  $273$  km s<sup>-1</sup>。

(2a) 使用在 (1b) 中獲得的經驗模型，計算 CME-1 和 CME-2 分別到達地球的預測到達時間  $\tau_{1,m}$  和  $\tau_{2,m}$ （以小時為單位）。 [4]

(2b) 觀測到的 CME-1 和 CME-2 到達地球的時間分別為 46.0 小時和 74.5 小時。如果某個 CME 的預測到達時間與其觀測到達時間的偏差在 20% 以內，則認為該經驗模型對該 CME 是有效的；否則，該模型無效。在總結答題紙上，通過勾選（✓）相應的方框來表明每個 CME 模型的有效性。 [2]

### 太陽風存在下的 CME

實際上，太陽和地球之間的空間充滿了太陽風，它會對 CME 產生阻力。這種阻力會根據 CME 相對於太陽風的速度而使 CME 減速或加速。為了考慮太陽風的影響，我們將在  $R_{\text{obs}}(t) \geq R_0$  的距離範圍內使用一個「僅阻力」模型，其中  $R_0$  是阻力成為影響 CME 運動的主要力量的距離。

該 CME 在「僅阻力」模型中的距離  $R_D(t)$  和速度  $V_D(t)$  由以下公式給出：

$$R_D(t) = \frac{S}{\gamma} \ln[1 + S\gamma(V_0 - V_s)(t - t_0)] + V_s(t - t_0) + R_0,$$

$$V_D(t) = \frac{V_0 - V_s}{1 + S\gamma(V_0 - V_s)(t - t_0)} + V_s,$$

其中， $\gamma = 2 \times 10^{-8} \text{ km}^{-1}$ ， $V_s$  是太陽風的恆定速度， $R_0$  和  $V_0$  分別是時間  $t_0$  的距離和速度， $S$  是符號因子。若  $V_0 > V_s$ ，則  $S = 1$ ；若  $V_0 \leq V_s$ ，則  $S = -1$ 。

- (3) 下表顯示了兩個 CME (CME-3 和 CME-4) 在不同時間  $t$  (以小時為單位) 的觀測徑向距離  $R_{\text{obs}}(t)$  (以  $R_\odot$  為單位) 從太陽表面開始的數值。每個表中的最後一個數據點 (分別對 D5 和 P8) 代表相應的 CME 到達地球的時間。對於本部分，假設  $V_s = 330 \text{ km s}^{-1}$ 。

CME-3			CME-4		
數據點	$t$ (h)	$R_{\text{obs}}(t) (R_\odot)$	數據點	$t$ (h)	$R_{\text{obs}}(t) (R_\odot)$
D1	0.200	6.36	P1	1.00	4.00
D2	0.480	7.99	P2	3.00	6.00
D3	1.22	11.99	P3	4.00	9.00
D4	1.49	13.51	P4	5.00	11.00
D5	58.05	214	P5	21.0	43.0
			P6	50.0	100
			P7	85.0	170
			P8	111	214

我們將評估「僅阻力」模型是否能夠滿意地預測這些 CME 的到達時間。使用該模型需要適當選擇  $t_0$ ，並相應確定  $R_0$  和  $V_0$ 。

- (3a) 對於 CME-3，採用以下兩個案例：

(C1)  $t_0$  被取為區間 D1 – D2 的中點；

(C2)  $t_0$  被取為區間 D3 – D4 的中點；

假設速度在每一特定區間 D1 – D2 和 D3 – D4 內保持恆定，但兩個區間之間可能不同。

使用  $t_0$ ,  $R_0$  和  $V_0$ ，計算在  $t = 58.05 \text{ h}$  時觀測到的與預測的徑向距離之間的差異  $\delta R_D \equiv R_{\text{obs}}(t) - R_D(t)$ ，以  $R_\odot$  為單位，針對這兩種情況分別進行計算。 [6]

- (3b) 評估 CME-4 在太陽和地球之間的 P5、P6、P7 和 P8 點處的  $R_D(t)$  值，採用與 (3a) 相似的流程： [4]

(C3)  $t_0$  被取為區間 P1 – P2 的中點；

(C4)  $t_0$  被取為區間 P3 – P4 的中點。

- (3c) 繪制 C3 和 C4 兩種情況下的  $R_D(t)$  (以  $R_\odot$  為單位) 與  $t$  (以小時為單位) 的關係曲線，針對 CME-4 在點 P5、P6、P7 和 P8 處的數據，標記你的圖作為「(3c)」。  
在同一張圖上，繪制上述兩種情況下的  $R_D(t)$  平滑曲線。對於這一部分，將  $x$  軸的範圍設為 0 到 180 h。 [10]

- (3d) 使用該圖，估計 CME-4 到達地球的實際到達時間與僅考慮阻力的模型預測的到達時間之間的絕對差值  $|\delta\tau|$ ，分別針對 C3 和 C4 的情況。 [4]

- (3e) 在總結答題紙中勾選 (✓) 適當的框以指示以下陳述是 TRUE 還是 FALSE (無需書面說明)：「太陽風對 CME 施加的阻力作用在 CME-3 中比 CME-4 更早變為主導。」 [1]

- (4) 將阻力視為 (1) 中 10 個 CME 的主要作用力。假設「僅阻力」模型適用於太陽表面 ( $R_0 = 1R_\odot$ ) 及以外的所有 CME。估計並列出每個 CME 的太陽風速度  $V_s$ ，單位為  $\text{km s}^{-1}$ 。此外，估計所有 10 個 CME 的平均太陽風速度  $V_{s,\text{avg}}$ 。 [7]