

# 第十八屆國際天文與天體物理奧林匹克競賽

## 理論試題

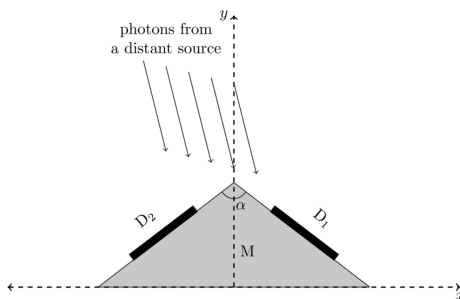
印度·孟買 2025 年 8 月 14 日

### 1. Daksha 任務

[10 分]

「Daksha」是一個印度提議的任務，包括兩顆衛星  $S_1$  和  $S_2$ ，在相同的圓形軌道上運行，軌道半徑  $r = 7000$  公里，但兩者之間有  $180^\circ$  的相位差。這些衛星在高能域（X 射線和伽馬射線）觀測宇宙。Daksha 任務中的每一顆衛星都使用多個扁平的矩形探測器。

爲了解如何定位天空中的一個源，我們將使用 Daksha 任務的簡化模型。假設  $S_1$  只有兩個相同的探測器  $D_1$  和  $D_2$ ，每個探測器的面積  $A = 0.50 \text{ m}^2$ 。這些探測器連接在一個不透明支架  $M$  上，如下圖所示。探測器位於  $y$  軸對稱的平面內，這些平面垂直於  $x$ - $y$  平面，並且彼此之間形成一個角度  $\alpha = 120^\circ$ 。



- (1) 當觀察位於  $x$ - $y$  平面上的遠處源時，探測器  $D_1$  檢測到功率  $P_1 = 2.70 \times 10^{-10} \text{ J s}^{-1}$ ，探測器  $D_2$  檢測到功率  $P_2 = 4.70 \times 10^{-10} \text{ J s}^{-1}$ 。

估計光源位矢與正  $y$  軸之間的角度  $\eta$ ，逆時針方向的角度視爲正。 [5]

考慮一個來自遙遠源（不一定在  $x$ - $y$  平面內）的單個脈衝，被 Daksha 的兩個衛星（ $S_1$  和  $S_2$ ）記錄。 $S_1$  和  $S_2$  記錄的脈衝峰值時間分別爲  $t_1$  和  $t_2$ 。

- (2) 如果  $t_1 - t_2$  測得爲  $10.0 \pm 0.1 \text{ ms}$ ，則確定地球上源可能存在的區域所占的比例  $f$ 。 [5]

### 2. Makar-Sankranti

[10 分]

在印度，當太陽從地球上看似進入黃道十二宮中的摩羯座（Makar = 摩羯座，Sankranti = 進入）時，人們慶祝「Makar-Sankranti」節。該節日現在每年大約在 1 月 14 日慶祝。許多年前，這個節日與北半球的冬至（我們假設在 12 月 21 日）重合。

- (1) 根據以上信息，求這個節日上次與北半球冬至重合的年份  $y_c$ 。 [3]
- (2) 已知太陽在 2006 年 1 月 14 日孟買當地時間 11:50:13 進入摩羯座的黃道區域，計算它在 2013 年進入摩羯座的日期  $D_{\text{enter}}$  和當地時間  $t_{\text{enter}}$ 。 [3]
- (3) Makar-Sankranti 節是在黃道十二宮中的摩羯座第一個日落的時候慶祝的。你可以假設孟買一月的當地時間日落時間爲 18:30:00。

請在 2006 年至 2013 年間每個年份標明節日的慶祝日期（在表中相應的框內勾選 ✓）。

[4]

年份	1.14	1.15	1.16	年份	1.14	1.15	1.16
2006				2010			
2007				2011			
2008				2012			
2009				2013			

### 3. 引力波

[15 分]

環繞的雙黑洞會產生引力波。考慮我們銀河系中的兩個黑洞，其質量分別為  $M = 36M_{\odot}$  和  $m = 29M_{\odot}$ 。它們以圓軌道圍繞其質心運行，軌道角頻率為  $\omega$ 。

- (1) 考慮牛頓引力，在時間  $t_{\text{ini}}$  時，兩個黑洞之間的距離是它們史瓦西半徑之和的 4.0 倍。推導此時黑洞軌道的角頻率  $\omega_{\text{ini}}$ 。用  $M$ 、 $m$  和物理常數給出你的答案。

計算  $\omega_{\text{ini}}$  的值（以  $\text{rad s}^{-1}$  為單位）。

[5]

- (2) 在廣義相對論中，軌道上的黑洞會發射頻率為  $f_{\text{GW}}$  的引力波，其滿足  $2\pi f_{\text{GW}} = \omega_{\text{GW}} = 2\omega$ 。這會縮小黑洞軌道，從而增加  $f_{\text{GW}}$ ，其變化率是

$$\frac{df_{\text{GW}}}{dt} = \frac{96\pi^{8/3}}{5} G^{5/3} c^{\beta} M_{\text{chirp}}^{\alpha/3} f_{\text{GW}}^{\delta/3},$$

其中  $M_{\text{chirp}} = \frac{(mM)^{3/5}}{(m+M)^{1/5}}$  稱為「啁啾質量」。

計算  $\alpha$ 、 $\beta$  和  $\delta$  的值。

[4]

- (3) 假設與該事件相關的引力波首次在時間  $t_{\text{ini}} = 0$  被檢測到。

[6]

推導當  $f_{\text{GW}}$  變得非常大時黑洞合併的觀測時間  $t_{\text{merge}}$  的表達式。用  $\omega_{\text{ini}}$ 、 $M_{\text{chirp}}$  和物理常數來表示你的答案。

計算  $t_{\text{merge}}$  的值（以秒為單位）。

### 4. 巴耳末減幅

[15 分]

考慮一顆被星雲包圍的主序星。這顆星在 V 波段的視星等為 11.315 等。靠近恆星的電離區域發射  $\text{H}\alpha$  和  $\text{H}\beta$  譜綫；它們的波長分別為  $0.6563 \mu\text{m}$  和  $0.4861 \mu\text{m}$ 。理論上預測的  $\text{H}\alpha$  譜綫與  $\text{H}\beta$  譜綫的通量比為  $f_{\text{H}\alpha}/f_{\text{H}\beta} = 2.86$ 。然而，當這些輻射穿過星雲外層的冷塵埃區域後，觀測到的  $\text{H}\alpha$  和  $\text{H}\beta$  譜綫的發射通量分別為  $6.80 \times 10^{-15} \text{ W m}^{-2}$  和  $1.06 \times 10^{-15} \text{ W m}^{-2}$ 。

消光  $A_{\lambda}$  是波長的函數，表示為

$$A_{\lambda} = \kappa(\lambda)E(B - V).$$

在這裡， $\kappa(\lambda)$  是消光曲綫， $E(B - V)$  表示在 B 和 V 濾光片波段中的顏色過剩。消光曲綫（ $\lambda$  以  $\mu\text{m}$  為單位）給出如下。

$$\kappa(\lambda) = \begin{cases} 2.659 \times \left( -1.857 + \frac{1.040}{\lambda} \right) + R_V, & 0.63 \leq \lambda \leq 2.20 \\ 2.659 \times \left( -2.156 + \frac{1.509}{\lambda} - \frac{0.198}{\lambda^2} + \frac{0.011}{\lambda^3} \right) + R_V, & 0.12 \leq \lambda < 0.63 \end{cases}$$

其中， $R_V = A_V/E(B - V) = 3.1$  是總消光與選擇性消光的比值。

(1) 求出  $\kappa(\text{H}\alpha)$  和  $\kappa(\text{H}\beta)$  的值。 [3]

(2) 求出色餘比值的值  $\frac{E(\text{H}\beta - \text{H}\alpha)}{E(B - V)}$ 。 [4]

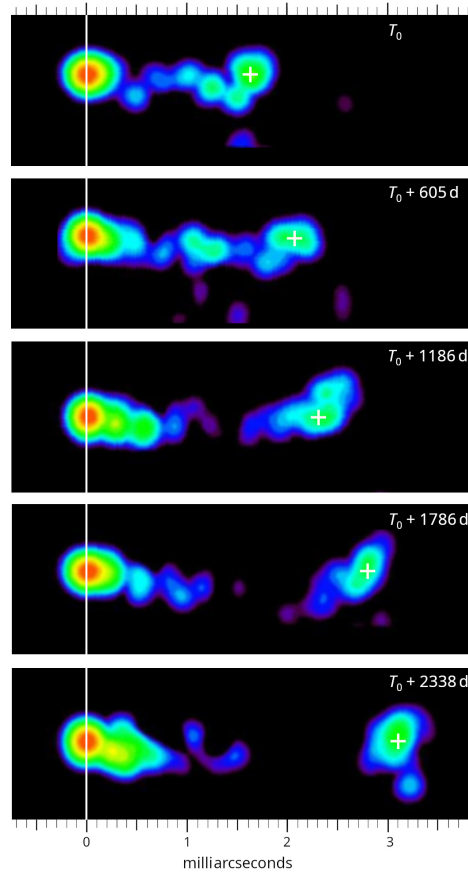
(3) 估計由於星雲引起的  $\text{H}\alpha$  和  $\text{H}\beta$  波段的消光， $A_{\text{H}\alpha}$  和  $A_{\text{H}\beta}$ 。 [6]

(4) 估計星雲的消光 ( $A_V$ ) 和在沒有星雲時恆星在 V 波段的視星等  $m_{V0}$ 。 [2]

## 5. 類星體

[20 分]

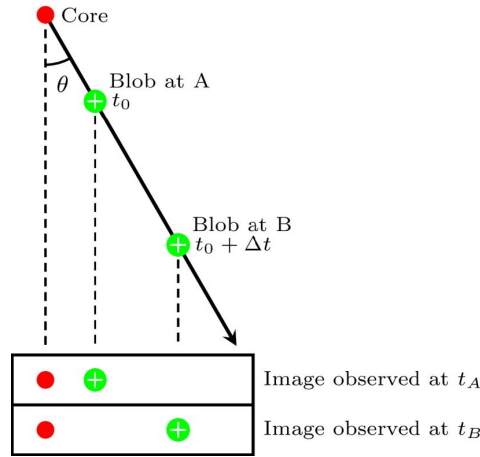
一個類星體是一個由超大質量黑洞驅動的極其明亮的活躍星系，它會發射相對論性噴流。圖中顯示了同一類星體（紅移  $z = 0.53$ ，光度距離  $D_L = 1.00 \times 10^{10} \text{ ly}$ ）在不同時間的射電圖像系列。其中「核心」與垂直的白色直線對齊，而由一個「團狀物」（標記為白色 +）組成的噴流隨時間遠離核心。每個面板顯示的觀測時間從第一個圖像開始以  $T_0$  表示。圖的頂部和底部標有角尺度。



(1) 對於每個觀測，確定團狀物相對於類星體核心的角距離  $\phi_{\text{blob}}$ （以毫角秒為單位）和橫向距離  $l_{\text{blob}}$ （以光年為單位）。然後，利用連續的觀測計算團狀物的橫向視速度  $v_{\text{app}}$ （以光速的分數表示， $\beta_{\text{app}} = v_{\text{app}}/c$ ）。最後，計算整個觀測期間的平均視速度  $\beta_{\text{app}}^{\text{ave}}$ 。 [5]

類星體噴流實際上以相對論速度  $v \equiv \beta c$  運動，但不一定是在天球平面上；例如，它與遙遠觀測者的視線（用虛綫表示）形成一個角度  $\theta$ （稱為「觀測角度」），如下面的示意圖所示。

對於這部分以及所有後續部分，忽略類星體的紅移和任何相對論效應。



- (2) 這個團塊在兩個不同的時間  $t_0$  (對應位置 A) 和  $t_0 + \Delta t$  (對應位置 B) 發出的光分別到達觀察者的時間為  $t_A$  和  $t_B$ 。這意味著觀察到 (視) 的時間差為  $\Delta t_{\text{app}} = t_B - t_A$ 。

(a) 找出  $\frac{\Delta t_{\text{app}}}{\Delta t}$  的比值表達式，用  $\beta$  和  $\theta$  表示。 [2]

(b) 使用這個比率，將  $\beta_{\text{app}}$  用  $\beta$  和  $\theta$  表示出來。 [2]

- (3) 如果物體的視速度超過光速 ( $\beta_{\text{app}} > 1$ )，則稱為超光速運動，如果不超過 ( $\beta_{\text{app}} < 1$ )，則稱為亞光速運動。

(a) 對於  $\beta_{\text{app}} = 1$ ，繪制  $\beta$  作為  $\theta$  函數的平滑曲線以標記亞光速和超光速運動之間的邊界。用斜綫 (///) 在圖中對超光速區域進行著色。 [4]

(b) 找出超光速運動發生的最低真實噴流速度 ( $\beta_{\text{low}} = v_{\text{low}}/c$ ) 及其對應的觀測角度  $\theta_{\text{low}}$ 。 [2]

- (4) 找出最大視角  $\theta_{\text{max}}$  的表達式，使得給定的  $\beta_{\text{app}}$  值成為可能。 [2]

類星體的核心，即其中央致密天體，其輻射的變異性源於因果關聯區域內發生的內部過程。該區域的尺度 (半徑) 通常被認為是核心史瓦西半徑的五倍左右。

- (5) 某個類星體的核心被發現其變化時間尺度約為 1 小時。求得中心致密天體質量的上限  $M_{\text{c,max}}$ ，單位為太陽質量。 [3]

## 6. 銀河系自轉 [20 分]

我們銀河系的旋轉曲線是通過觀測不同銀道經度處的中性氫 (HI) 雲在視線方向上的速度，利用 21 釐米 HI 譜綫確定的。考慮一個位於銀心 (GC) 距離為  $R$ ，且距離太陽為  $D$  的 HI 雲，其銀經為  $l$ 。假設太陽距離銀心為  $R_0 = 8.5 \text{ kpc}$ 。假設太陽和 HI 雲都在銀道面上以角速度  $\Omega_0$  和  $\Omega$ ，以及旋轉速度  $V_0$  和  $V$  分別繞銀心做圓周運動。

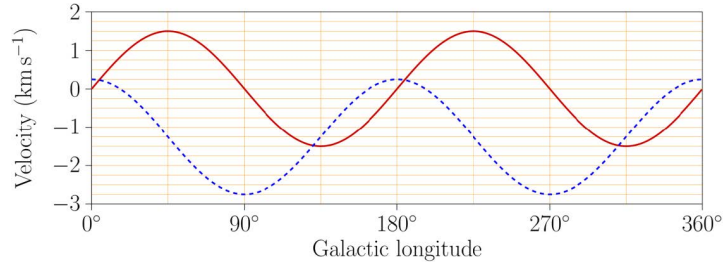
雲的視線速度 ( $V_r$ ) 和橫向速度 ( $V_t$ ) 分量，如從太陽觀測，可以表示為

$$V_r = (\Omega - \Omega_0)R_0 \sin l,$$

$$V_t = (\Omega - \Omega_0)R_0 \cos l - \Omega D.$$

從北銀極看，銀河的旋轉方向是順時針方向。在本題中，我們將視向速度定義為遠離時為正值，雲團將被視為點物體。

- (1) 在總結答題紙提供的圖中，繪制從  $D = 0$  到  $D = 2_0$  的  $V_r$  與  $D$  的關係曲線，針對兩個視線方向 (i)  $l = 45^\circ$  和 (ii)  $l = 135^\circ$ 。用  $l$  的值標記你畫的每條線/曲線。 [5]
- (2) 下圖顯示了距離太陽 100 pc 處的恆星的平均徑向（實線，紅色曲線）和橫向（虛線，藍色曲線）速度分量，以銀經為函數進行繪制。



使用該圖，估計太陽繞銀河中心 (GC) 的軌道週期 ( $P$ )，以百萬年 (Myr) 為單位。 [3]

- (3) 簡·奧爾特指出，在太陽鄰域 ( $D \ll R_0$ ) 中，角速度差異 ( $\Omega - \Omega_0$ ) 將很小，因此推導出以下對視線速度和橫向速度分量的一階近似：

$$V_r = AD \sin 2l,$$

$$V_t = AD \cos 2l + BD.$$

其中  $A$  和  $B$  被稱為奧爾特常數。

讓我們考慮兩種情況：

- (I) 銀河系的實際觀測旋轉曲線，以及
- (II) 旋轉曲線是針對一個假設情景，其中銀河系不含暗物質，且銀河系的全部質量被假定集中在其中心。

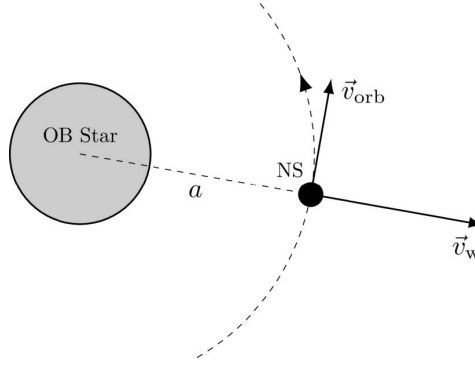
- (a) 推導太陽所在位置的旋轉速度徑向梯度  $\left. \frac{dV}{dR} \right|_{R=R_0}$  的兩種情況的表達式。 [2]
- (b) 用  $V_0$ 、 $R_0$  以及太陽所在位置的徑向旋轉速度梯度  $\left. \frac{dV}{dR} \right|_{R=R_0}$  來表示  $A$  和  $B$ 。 [8]
- (c) 奧爾特常數在兩種給定情況 (I) 和 (II) 中的比值 ( $A/B$ ) 分別定義為  $F_I$  和  $F_{II}$ 。確定  $F_I$  和  $F_{II}$ 。 [2]

## 7. 中子星雙星

[20 分]

在一個包含致密星的雙星系統中，當伴星沒有溢出洛希瓣時，致密星的吸積主要來源於伴星的恆星風。這種由風提供的吸積在包含早期型星（如 O 或 B 星，以下簡稱 OB 星）的系統中尤為顯著，特別是當伴星與致密天體（如中子星）處於緊密軌道時。

考慮這樣一個 NS-OB 星雙星系統，其中質量為  $M_{NS} = 2.0M_\odot$ 、半徑為  $R_{NS} = 11$  km 的中子星以軌道速度  $v_{orb} = 1.5 \times 10^5$  m s<sup>-1</sup> 繞 OB 星中心以半徑  $a$  做圓周運動（見下圖）。在整個問題中，假設 OB 星的質量損失是球對稱的，其損失速率為  $\dot{M}_{OB} = 1.0 \times 10^{-4} M_\odot$  yr<sup>-1</sup>。



- (1) 吸積半徑  $R_{\text{acc}}$  被定義為恆星風被中子星捕獲的最大距離。如果中子星軌道距離處的恆星風速度為  $v_w = 3.0 \times 10^6 \text{ m s}^{-1}$ ，使用標準逃逸速度計算，求該系統中的  $R_{\text{acc}}$  值（單位為 km）。 [3]
- (2) 假設所有捕獲的物質都被中子星吸積，估計從恆星風到中子星的物質吸積率  $\dot{M}_{\text{acc}}$ ，以  $M_{\odot} \text{ yr}^{-1}$  為單位，如果  $a = 0.5 \text{ AU}$ 。忽略輻射壓力和吸積氣體有限的冷卻時間的影響。 [3]
- (3) 現在考慮一種情況，即在軌道距離  $a$ （靠近中子星）處，恆星風的速度與中子星的軌道速度相當。在這種情況下，從恆星風向中子星轉移的質量通量可以表示為  $\dot{M}_{\text{acc}} = \dot{M}_{\text{OB}} f(\tan \beta, q)$ ，其中  $q = M_{\text{NS}}/M_{\text{OB}}$  是雙星系統的質量比， $\tan \beta$  是風速度方向與遠離 OB 星的徑向方向之間的夾角，在中子星的參考系中。假設  $M_{\text{OB}} \gg M_{\text{NS}}$ ，求  $f(\tan \beta, q)$  的表達式。 [6]
- (4) 考慮完全電離的物質徑向堆積，並由於中子星的強磁場  $B$  而受到阻礙。這種效應可以建模為一種壓力，其表達式為  $\frac{B^2}{2\mu_0}$ 。我們將假設中子星具有一個偶極磁場，其在赤道平面內的強度隨距離  $r$  ( $r \gg R_{\text{NS}}$ ) 而變化

$$B(r) = B_0 \left( \frac{R_{\text{NS}}}{r} \right)^3,$$

其中  $B_0$  是中子星赤道處的磁場。假設磁偶極子的軸與中子星的自轉軸對齊。

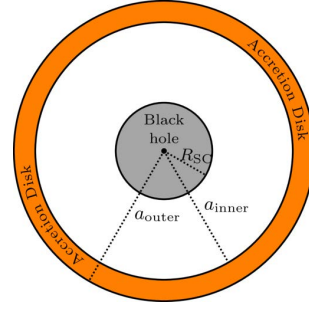
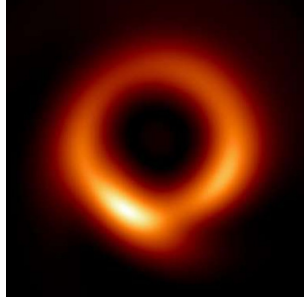
- (a) 求赤道平面處的磁壓  $P_{\text{eq,mag}}$ ，用  $B_0$ 、 $R_{\text{NS}}$ 、 $r$  和其他合適的常數表示。 [1]
- (b) 在赤道平面處，吸積流被磁場停止的最大距離稱為磁層半徑  $R_m$ 。這種物質流動會由於入射恆星風與中子星之間的相對運動而產生壓力。求出使  $R_m$  與  $R_{\text{acc}}$  重合的臨界磁場  $B_{0,c}$  的近似表達式，並計算其數值（單位為特斯拉）。對於  $r > R_m$  的區域，忽略磁效應，並考慮  $v_w \gg v_{\text{orb}}$ 。 [7]

## 8. 黑洞的陰影

[20 分]

事件視界望遠鏡（EHT）發佈了 M87 星系中心超大質量黑洞的圖像，如下方左圖所示。

爲了解該圖像的一些簡單特徵，我們將考慮一個簡化模型：一個質量為  $M = 6.5 \times 10^9 M_{\odot}$ 、不旋轉、靜態、球對稱的黑洞，其周圍有一個無質量、薄、平面狀的吸積盤，內半徑和外半徑分別為  $a_{\text{inner}} = 6R_{\text{SC}}$  和  $a_{\text{outer}} = 10R_{\text{SC}}$ ，其中  $R_{\text{SC}}$  是史瓦西半徑。下方右圖顯示了正面視角的示意圖（圖的比例不準確）。



我們假設吸積盤是唯一需要考慮的光源。吸積盤上的每個點都會向各個方向發射光綫。這些光綫在黑洞的引力場影響下傳播。光綫的傳播路徑由下面的兩個方程決定（這些方程與物體繞太陽運動時的方程類似）：

$$\frac{1}{2}v_r^2 + \frac{L^2}{2r^2}\left(1 - \frac{2GM}{c^2r}\right) = E; \quad v_\phi = r\omega = \frac{L}{r};$$

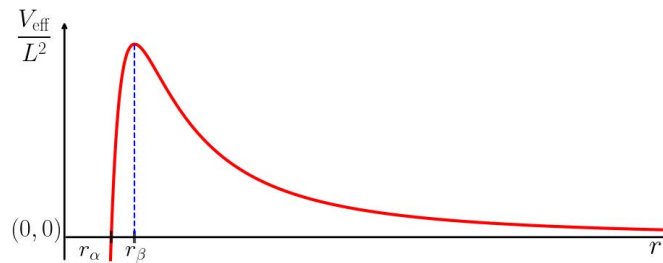
其中  $r \in (R_{SC}, \infty)$  是徑向坐標， $\phi \in [0, 2\pi)$  是方位角， $E$  和  $L$  分別是與守恆能量和守恆角動量相關的常數。

這裡  $v_r = dr/dt$  是徑向速度的大小， $v_\phi$  是切向速度的大小，而  $\omega = d\phi/dt$  是角速度。我們定義軌跡的衝擊參數為  $b = \frac{L}{\sqrt{2E}}$ 。這個問題中忽略時間膨脹。

另一個有用的方程可以通過對第一個方程求導得到：

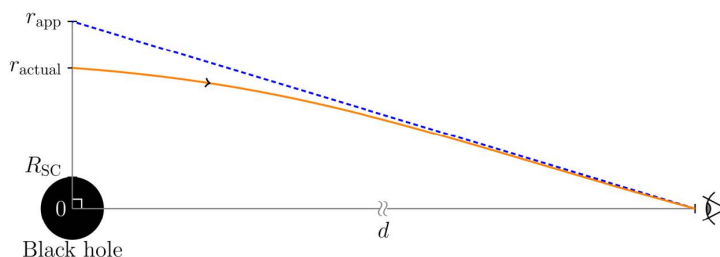
$$\frac{dv_r}{dt} - \frac{L^2}{r^3} + \frac{3GML^2}{c^2r^4} = 0.$$

- (1) 黑洞周圍可以存在環形光軌跡。找出這種光綫軌跡的半徑  $r_{ph}$  和碰撞參數  $b_{ph}$ ，用  $M$  和相關常數表示。 [4]
- (2) 計算光子完成圓周光路中一個完整軌道所需的時間  $T_{ph}$ ，單位為秒。 [2]
- (3) 上述徑向速度方程（本問題中的第一個方程）可以與光軌跡的方程  $\frac{v_r^2}{2} + V_{eff}(r) = E$  進行比較。下面給出了  $V_{eff}/L^2$  隨  $r$  變化的示意圖。



- (a) 圖中表示了兩個特殊的半徑， $r_{\alpha}$  和  $r_{\beta}$ 。推導出  $r_{\alpha}$  和  $r_{\beta}$  的表達式，用  $M$  和相關常數表示。 [2]
- (b) 一個光子從吸積盤向黑洞內部傳播時，在某些情況下仍可以逃逸到無限遠處。找出這種光子的轉折點半徑  $r_t$  的最小值表達式，用  $M$  和相關常數表示。找出這種光子的最小影響參數  $b_{min}$  的表達式。 [3]

- (4) 一束來自天空平面距離系統中心  $r_{\text{actual}}$  的光綫會因為黑洞的引力而發生強烈彎曲，最終到達一個距離系統很遠的觀測者（用眼睛表示），如下圖所示。



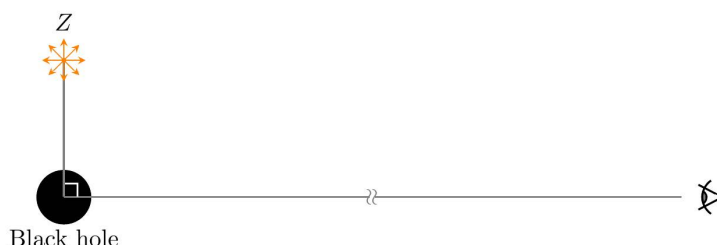
對這位觀察者來說，這條光綫似乎來自黑洞中心在天球平面上距離為  $r_{\text{app}} \approx b$  的另一點，其中  $b$  是該光子軌跡的碰撞參數。對於在吸積盤上位於  $r = r_{\text{actual}}$  處的點，可以假設以下關係：

$$b(r_{\text{actual}}) \approx r_{\text{actual}} \left(1 + R_{\text{SC}}/r_{\text{actual}}\right)^{1/2}.$$

對於遠處的觀測者，就像我們自己一樣，以面對盤面的視角觀察吸積盤，這個系統的圖像在天球平面上看起來會呈現圓對稱性。確定圖像的最外側表觀半徑  $r_{\text{outer}}$  和最內側表觀半徑  $r_{\text{inner}}$ ，單位為 AU。

[5]

- (5) 考慮到一個孤立的超大質量黑洞，其質量為  $M = 6.5 \times 10^9 M_{\odot}$ ，沒有吸積盤。如圖所示，在距離黑洞一定位置（例如  $r_Z = 6R_{\text{SC}}$ ）的點 Z 處發生了一次持續 5 秒的強烈電磁輻射爆發。點 Z 處的爆發向各個方向發射光。一個位於黑洞遠處的觀測者（圖中用眼睛表示）對黑洞周圍的區域進行長時間曝光拍攝，曝光時間為 60 秒。



對下列每個陳述，請選擇正確的選項：

- (a) 從 Z 到觀察者的光可能傳播的路徑數目是 [2]  
 (A) 至多 1 個 (B) 恰好 1 個 (C) 恰好 2 個 (D) 多於 2 個
- (b) 在長時間曝光圖像中將看到的電磁爆發在 Z 點的圖像數量是 [2]  
 (A) 至多 1 個 (B) 恰好 1 個 (C) 恰好 2 個 (D) 多於 2 個

## 9. 大氣視寧度

[35 分]

一個望遠鏡有一個焦距  $f = 200 \text{ cm}$ 、直徑  $D = 15 \text{ cm}$  的復合消色差物鏡，對準天頂處的星星。

- (1) 找出由物鏡在焦平面上形成的點光源像的直徑（以米為單位）， $d_{\text{image}}$ ，考慮僅衍射效應的情況，對於綠光（ $\lambda = 550 \text{ nm}$ ）。

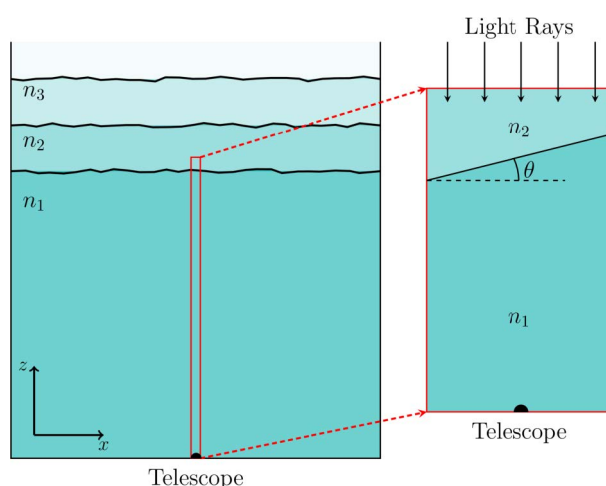
[1]



天體源的像也會受到所謂的「大氣視寧度」的影響。

大氣層中各層之間的邊界以及各層的折射率由於湍流、溫度變化和其他因素而不斷變化。這會導致望遠鏡焦點平面上恆星像位置發生微小變化，這種現象稱為「閃爍效應」。在接下來的問題中，除了使用上述的恆星像的有限衍射受限尺寸外，不再考慮任何干涉效應。

下圖左側顯示了大氣的垂直橫截面，包含多個不同折射率的層 ( $n_1, n_2, n_3, \dots$ )。右側顯示了大氣中一個薄的垂直段及其兩個最低折射率層 ( $n_1$  和  $n_2$ ， $n_1 > n_2$ ) 之間的邊界。我們僅考慮這兩個層及其邊界來解決這個問題。圖示不按比例。



- (2) 讓兩層之間的邊界位於望遠鏡物鏡正上方高度  $H = 1 \text{ km}$  處，與水平面呈  $\theta = 30^\circ$  的傾斜角。在本題的所有部分中， $\theta$  均取逆時針方向為正。對於單色光源， $n_1 = 1.00027$  和  $n_2 = 1.00026$ 。設望遠鏡焦平面上某位於天頂的恆星的像的角位移為  $\alpha$ 。

(a) 在邊界處繪制一個適當標注的光綫圖，顯示  $n_1$ 、 $n_2$ 、 $\theta$  和  $\alpha$ 。 [2]

(b) 找出  $\alpha$  用  $\theta$ 、 $n_1$  和  $n_2$  表示的表達式。使用小角度近似： $\sin \alpha \approx \alpha$  和  $\cos \alpha \approx 1$ 。 [2]

(c) 計算當  $\theta$  增加 1% (保持  $n_1$  和  $n_2$  不變) 時，像位置的位移  $\Delta x_\theta$  (以米為單位)。 [3]

(d) 計算當  $n_2$  增加 0.0001% (保持  $n_1$  和  $\theta$  不變) 時，像位置的位移  $\Delta x_n$  (以米為單位)。 [3]

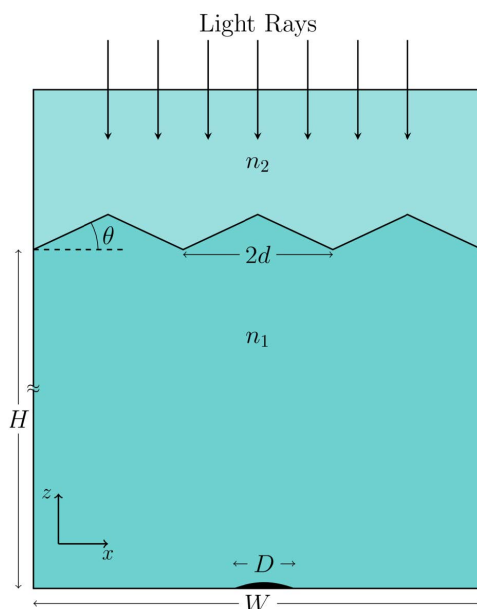
- (3) 對於來自天頂的恆星發出的白光，選擇以下哪一行最準確地描述了像的形狀和顏色，在總結答題紙中打勾 (✓) 選擇適當的選項 (僅一個)。注意圖中  $x$  向右增加。 [2]

	像顏色	像形狀	左邊緣	右邊緣
A	白色	圓形		
B	白色	橢圓形		
C	彩色	圓形	藍色	紅色
D	彩色	圓形	紅色	藍色
E	彩色	橢圓形	藍色	紅色
F	彩色	橢圓形	紅色	藍色

對於本問題的所有剩餘部分，我們考慮波長為  $\lambda = 550 \text{ nm}$  的單色綠光。我們將各層之間的

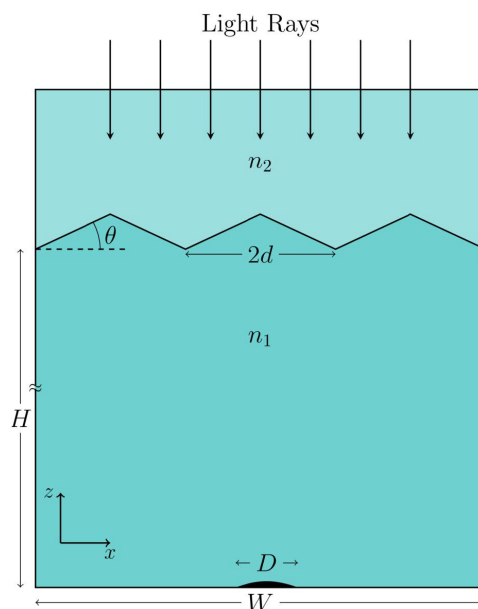
邊界建模為一組無限的鋸齒形平面（垂直於頁面平面），沿  $x$  軸方向間隔  $d = 10\text{ cm}$ ，角度為  $\theta = 10^\circ$  或  $\theta = -10^\circ$ 。

下圖（比例不準確）顯示了這種大氣模型的橫截面，其寬度為  $W$  ( $W \ll H$ )。對於大孔徑望遠鏡來說，這種邊界折綫特性會導致焦平面上出現斑點。



(4) 考慮一個如上所述的大氣模型。

(a) 下圖顯示了具有連續鋸齒平面的氣層部分，其參數與上述相同（比例不準確）。



在摘要答案紙上的此圖複製件中，畫出入射光線路徑，直到望遠鏡物鏡放置的平面，該平面由圖下方的灰色虛綫所示。

在圖中用「X」標出（如果有）那些不會接收到光綫的區域。

[4]

(b) 計算此類區域的寬度  $W_X$ 。

[3]

(c) 通過適當選擇望遠鏡相對於邊界結構的位置，找到可以獲得恆星單一圖像的望遠鏡物鏡的最大直徑  $D_{\max}$ 。

[4]

- (5) 考慮邊界在  $x$  和  $y$  方向上都允許呈現鋸齒形狀（如同金字塔的視場），且  $D = 100 \text{ cm}$ （焦距  $f = 200 \text{ cm}$ ）的情況。

在總結答題紙上給出的方框中繪制結果斑點的定性模式。

[6]

- (6) 對湍流大氣，考慮相同的鋸齒形狀沿  $x$  方向平行於邊界層延伸，但現在兩個平面之間的夾角在 1.0 秒內以均勻速率從  $10^\circ$  變化到  $-10^\circ$ ，這導致圖像位置以均勻速率移動。

考慮一個口徑  $D = 8 \text{ cm}$ 、焦距  $f = 1 \text{ m}$  的望遠鏡。估計其 CCD 相機允許的最長曝光時間  $t_{\max}$ ，使得只能得到一個圖像，且圖像位置的任何可能偏移量小於衍射極限直徑的 1%。

[5]

## 10. 大爆炸核合成

[35 分]

在宇宙早期的輻射主導時期，宇宙的尺度因子  $a \propto t^{1/2}$ ，其中  $t$  是自大爆炸以來的時間。在這一時期大部分時間里，中子 ( $n$ ) 和質子 ( $p$ ) 通過弱相互作用保持熱平衡。自由中子或質子的數量密度 ( $N$ ) 與溫度假設  $T$  以及它們相應的質量  $m$  有關，使得

$$N \propto m^{3/2} \exp\left(-\frac{mc^2}{k_B T}\right),$$

只要時間  $t \leq t_{\text{wk}} = 1.70 \text{ 秒}$ ，當  $k_B T \geq k_B T_{\text{wk}} = 800 \text{ keV}$ 。在  $t_{\text{wk}}$  之後，弱相互作用不能再維持這樣的平衡，自由中子衰變成質子的半衰期為 610.4 秒。

- (1) 讓質子的數量密度為  $N_p$ ，中子的數量密度為  $N_n$ 。計算在時間  $t_{\text{wk}}$  時由比值  $X_{n,\text{wk}} = N_n/(N_n + N_p)$  給出的中子相對豐度。

[4]

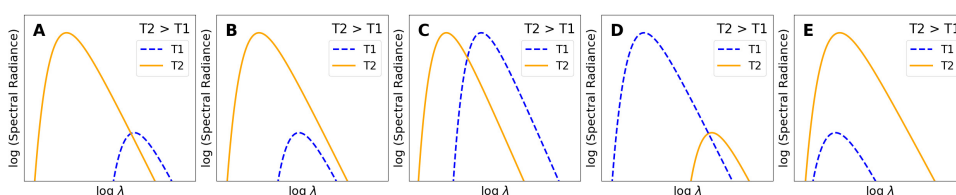
- (2) 光子在所有時期都保持熱平衡並維持黑體譜。

(a) 找到指數  $\beta$ ，使得  $T(a) \propto a^\beta$ 。

[2]

(b) 識別以下哪些圖顯示了兩種溫度  $T_1$  和  $T_2$  的譜能量密度的正確行為。在總結答案表中打勾 (✓) 正確的選項。

[2]



- (3) 在  $t_{\text{wk}}$  之後，由質子和中子形成氦的過程由薩哈方程所支配，該方程由印度物理學家梅格納德·薩哈教授提出，可以簡化為

$$\frac{N_D}{N_n} = 6.5\eta \left(\frac{k_B T}{m_n c^2}\right)^{3/2} \exp\left[-\frac{(m_D - m_p - m_n)c^2}{k_B T}\right].$$

在這裡，重子與光子的比值  $\eta$  是  $6.1 \times 10^{-10}$ ， $N_D$  是氦的數密度。

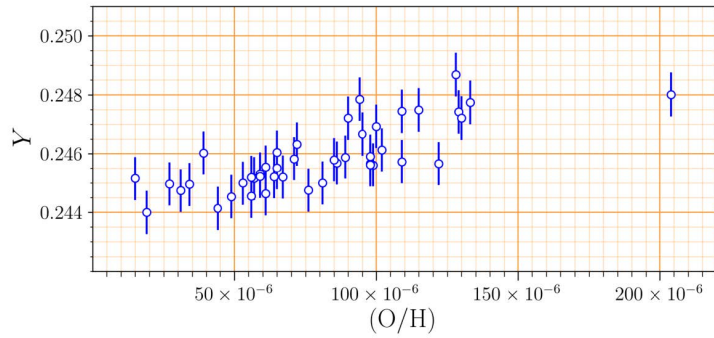
- (a) 在總結答案表的網格上繪制  $N_D/N_n$  比值，溫度取至少 4 個在  $k_B T = [60, 70] \text{ keV}$  範圍內合理分布的值，並通過這些點畫一條光滑曲綫。

[5]

- (b) 從圖中找出當  $N_D = N_n$  時的  $k_B T_{\text{nuc}}$ （單位為 keV）。

[1]

- (c) 相反，現在假設所有自由中子在  $k_B T_{\text{nuc}}$  時立即與質子結合形成氘，然後立即轉化為氦 ( ${}^4\text{He}$ )。計算形成氦的相應核合成時間  $t_{\text{nuc}}$  (以秒為單位)。 [4]
- (4) 計算  $t_{\text{nuc}}$  時刻之前  $X_{\text{n,nuc}}$  的值。 [5]
- (5) 原始氦丰度， $Y_{\text{prim}}$ ，被定義為宇宙中在  $t_{\text{nuc}}$  之後，束縛在氦中的總重子質量所佔的分數。獲得  $Y_{\text{prim}}$  的理論估計值。為了此次計算的目的，假設  $m_p \approx m_n$ ，並且氦的質量  $m_{\text{He}} \approx 4m_n$ 。 [3]
- (6) 氦的原始丰度很難測量，因為恆星不斷地將宇宙中的氫轉化為氦。在星系中，恆星處理的量可以通過氧 (僅由恆星產生) 相對於氫的相對數密度來表徵，記作  $(\text{O}/\text{H})$ 。下面繪制了不同星系中  $(\text{O}/\text{H})$  和氦丰度  $Y$  的測量結果。



使用本圖中的點 (該圖在總結答題紙中復現) 來回答以下問題。

- (a) 估計一個氧氫比為  $(\text{O}/\text{H}) = 1.75 \times 10^{-4}$  的藍致密矮星系的  $Y$  值。 [2]
- (b) 獲取上述數據擬合的直線的斜率  $dY/d(\text{O}/\text{H})$ 。 [2]
- (c) 根據以上數據估計原始氦丰度， $Y_{\text{prim}}^{\text{obs}}$ 。 [2]
- (7)  $Y_{\text{prim}}$  和  $Y_{\text{prim}}^{\text{obs}}$  之間的偏差可以通過改變重子與光子比值  $\eta$  來解決。當  $\eta$  減小時，如總結答題紙中的  $\downarrow$  所示，應在摘要答案表提供的方框中指示  $N_D/N_n(T)$ 、 $T_{\text{nuc}}$  (當  $N_D = N_n$  時)、 $t_{\text{nuc}}$ 、 $X_{\text{n,nuc}}$  和  $Y_{\text{prim}}$  的增加 ( $\uparrow$ ) 或減少 ( $\downarrow$ )。 [3]

## 11. 圖中星

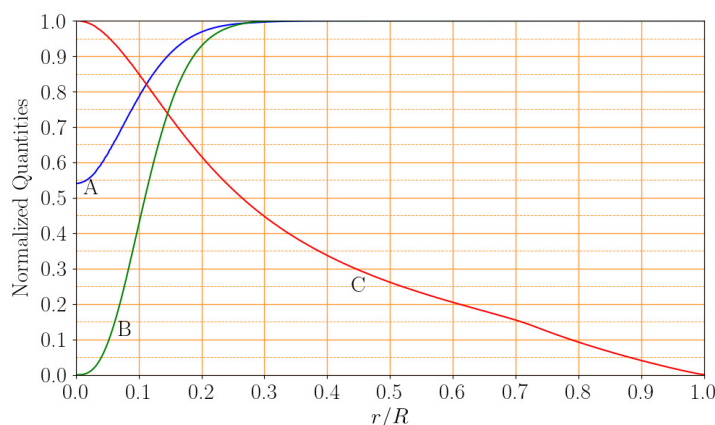
[50 分]

恆星可以很好地近似為球對稱物體，因此在建模恆星內部時可以將從中心到某一點的徑向距離  $r$  作為唯一的獨立變量。半徑為  $r$  的球體內所包含的質量用  $m(r)$  表示。光度  $l(r)$  定義為單位時間內通過半徑為  $r$  的球面向外流動的淨能量。其他感興趣的量例如密度  $\rho(r)$ 、溫度  $T(r)$ 、氫的質量分數  $X(r)$ 、氦的質量分數  $Y(r)$  以及單位質量和單位時間產生的核能  $\epsilon_{\text{nuc}}(r)$ ，都被視為  $r$  的函數。在整個問題中，我們將忽略恆星內部元素的擴散和重力沈降效應。

符號「log」指以 10 為底的對數。該問題由三個獨立部分組成。

### (1) 第一部分：恆星內部

下圖顯示了質量為  $1M_{\odot}$ 、年齡為 4 Gyr 的恆星模型中三個結構量 A、B 和 C 隨分數半徑  $r/R$  的變化情況，其中  $R$  是恆星的光球半徑。恆星在 (光球) 表面的氦質量分數  $Y_s$  和金屬丰度 (所有比氦重的元素的質量分數)  $Z_s$  分別為  $(Y_s, Z_s) = (0.28, 0.02)$ 。圖中所有顯示的量都以其各自的最大值進行了歸一化。



- (a) 從五個可能性中唯一地識別出三個量 A、B 和 C： [6]

$$T(r), \quad l(r), \quad \epsilon_{\text{nuc}}(r), \quad X(r), \quad Y(r).$$

(在總結答題紙上，將 A/B/C 寫在適當的量旁邊。不需要對答案進行說明。)

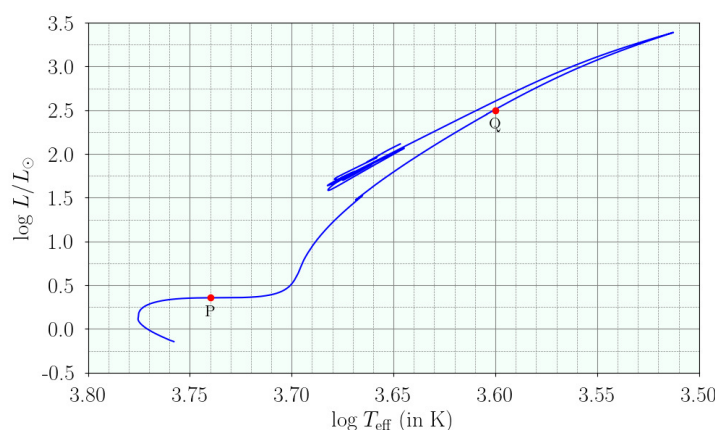
- (b) 這顆恆星中心的氦質量分數  $Y_c$  是多少？ [3]

- (c) 從 (a) 中給出的五個量 (未被識別為曲線 A、B 或 C) 列表中，繪制剩餘的兩個量作為  $r/R$  函數在同一圖上，並在圖中標注你的曲線以表示它們各自對應的量。 [5]

## (2) 第二部分：演化的恆星

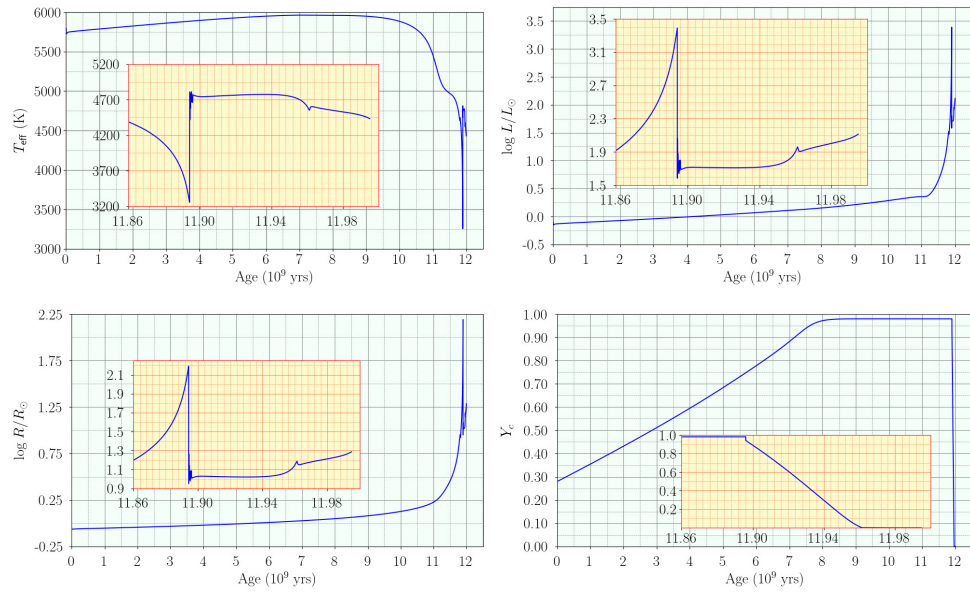
考慮一個初始均勻組成的  $1M_{\odot}$  恆星的演化過程，其初始氦元素質量分數為  $Y_0 = 0.28$ ，並且金屬元素質量分數為  $Z_0 = 0.02$ 。下面的圖顯示了該恆星從零齡主序階段 (ZAMS) 演化到其核心停止燃燒氦元素時，各種全局量的變化情況。

下圖顯示了恆星在赫羅圖 (以  $\log L/L_{\odot}$  對  $\log T_{\text{eff}}$  作圖，其中  $L$  是表面光度， $T_{\text{eff}}$  是有效溫度) 上的演化軌跡。



下圖包含四個圖表，分別展示了同一恆星的  $T_{\text{eff}}$  (單位為 K)、 $L$  (以  $\log L/L_{\odot}$  形式繪制)、 $R$  (以  $\log R/R_{\odot}$  形式繪制) 和  $Y_c$  隨年齡 (單位為  $10^9$  年) 的變化。在這些四個圖表中，插圖詳細展示了這些量在  $11.86 \times 10^9$  年至  $12.00 \times 10^9$  年之間的變化，以提高清晰度。





使用這些圖表來回答下面的問題。

- 這顆恆星的主序星壽命  $t_{\text{MS}}$  (以年為單位) 大約是多少? [1]
- 恆星在其核心燃燒氦氣的持續時間,  $\Delta t_{\text{He}}$  (以年為單位) 大約是多少? [1]
- 恆星的光度為  $1L_{\odot}$  時, 其核心處初始氫的燃燒比例  $f_{\text{H}}$  是多少? [3]
- 恆星  $R_1$  的半徑是多少, 當其核心的氫初始量有 60% 被消耗時? 請以  $R_{\odot}$  為單位作答。 [3]
- 這顆恆星在赫羅圖上標記的位置 P 和 Q 對應的半徑  $R_P$  和  $R_Q$  分別是多少? 請以  $R_{\odot}$  為單位給出答案。 [4]

### (3) 第三部分：恆星內部的質量分布

支配恆星內部質量分布的方程由以下給出：

$$\frac{dm(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r).$$

用三個無量綱變量來表達這個方程會很方便, 即質量分數  $q$ 、半徑分數  $x$  以及相對密度  $\sigma$ , 我們定義為

$$q = m/M, \quad x = r/R, \quad \sigma = \rho/\bar{\rho},$$

其中  $M$  和  $R$  分別是恆星的總質量和半徑,  $\bar{\rho} \equiv \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}$  是恆星的平均密度。對於我們在本部分將要討論的特定恆星, 給出以下信息：

- 中心密度  $\rho(x=0) = 80\bar{\rho}$ .
- 這顆恆星質量的一半包含在其總半徑內 25% 的區域, 其質量的 70% 包含在其總半徑內 35% 的區域。

在本問題的所有後續部分中, 所有導出數值系數只需四捨五入到小數點後三位。

- 表達上述描述質量與半徑之間依賴關係的方程, 用  $x$ 、 $\frac{dq(x)}{dx}$  和  $\sigma(x)$  來表示。 [2]

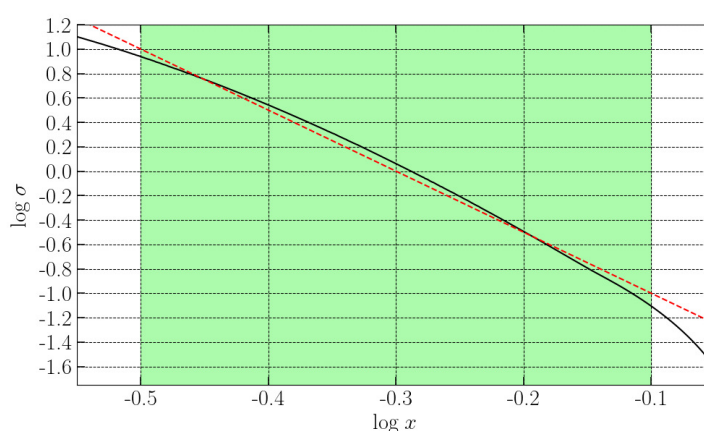
爲了獲得質量隨半徑的分布，我們需要知道恆星內部的密度分布。爲瞭解決這個問題，我們將通過兩個  $x$  域的近似形式來描述密度隨半徑的變化：

- 恆星的內部部分： $0 \leq x \leq 0.32$ ;
- 恆星的中間部分： $0.32 < x < 0.80$ ;

我們不對最外層部分進行近似，即  $0.80 \leq x \leq 1.00$ 。

(b) 中間部分的近似：

恆星中間部分的  $\log \sigma$  隨  $\log x$  的變化情況如下面的圖中（黑色曲線）所示。我們將在域  $-0.5 < \log x < -0.1$ （即  $0.32 \lesssim x \lesssim 0.80$ ，如圖中綠色陰影區域所示）內對  $\log \sigma$  作爲  $\log x$  的函數進行綫性近似（圖中紅色虛綫所示）。我們將用最近的整數來近似該直綫的斜率。



使用這個近似來寫出  $\sigma(x)$  作爲  $x$  的函數在  $0.32 < x < 0.80$  區間內的表達式。 [4]

(c) 使用 (b) 的結果推導出在域  $0.32 < x < 0.80$  中  $q(x)$  的表達式。 [6]

(d) 內層部分的近似值：

在恆星的內部區域 ( $0 \leq x \leq 0.32$ )，密度可以近似爲半徑的綫性函數，即  $\sigma(x) = Ax + B$ ，其中  $A$ 、 $B$  爲常數。確定  $A$  和  $B$ ，從而得到該區域  $0 \leq x \leq 0.32$  內  $q(x)$  的表達式。注意，前一部分和本部分所採用的近似可能導致在  $x = 0.32$  處密度或質量出現小的不連續性。 [8]

(e) 在 (c) 和 (d) 中得到的  $q(x)$  表達式是近似值，它們很好地描述了質量隨半徑的變化，但僅在恆星的特定區域有效。對於區域  $0.80 \leq x \leq 1$ （我們尚未推導出該區域的表達式），可以使用鄰近區域的適當外推法。利用這些近似表達式和給定數據，繪制  $q(x)$  與  $x$  的光滑曲綫 ( $q(x)$  及其導數均無間斷)，以表示整個恆星 ( $0 \leq x \leq 1$ ) 中質量隨半徑的變化。 [4]

## 12. 黑洞的霍金輻射

[50 分]

- (1) 黑洞 (BH) 通常是由大質量恆星在其生命週期結束時發生引力坍縮形成的一個點，稱爲奇點。由於這種天體具有極強的引力，任何進入所謂事件視界（一個以  $r = R_{\text{SC}}$  爲半徑的球面，其中  $r$  是奇點的距離）的物質都無法逃脫。這裡， $R_{\text{SC}}$  指的是史瓦西半徑。

- (a) **模擬霍金輻射的起源**：考慮一對粒子，每個粒子的質量為  $m$ ，在黑洞視界兩側產生。其中一個粒子略微位於視界外， $r \approx R_{\text{SC}}$ ，而另一個粒子位於視界內， $r = \kappa R_{\text{SC}}$ 。假設粒子的總能量是其靜止質量能量  $mc^2$  和黑洞引力勢能之和。

確定使粒子對總能量為零的  $\kappa$  值。

[4]

- (b) **黑洞的溫度**：如果在上述過程中在視界外產生的粒子具有足夠的動能，它可能通過一種稱為霍金輻射的過程逃逸出黑洞。而那個在視界內、具有負能量的粒子則被吸收，從而減少黑洞的質量。

假設所有的霍金輻射都是由光子組成，形成一個在波長  $\lambda_{\text{bb}} = 16R_{\text{SC}}$  處達到峰值的黑體譜。已知對於太陽質量的黑洞， $R_{\text{SC},\odot} = 2.952 \text{ km}$ 。

求出對應這種黑體輻射的黑洞溫度  $T_{\text{bh}}$  的表達式。用質量  $M_{\text{bh}}$  和物理常數來表示你的答案。計算一個質量為  $10M_{\odot}$  的黑洞的施瓦茨希爾德半徑  $R_{\text{SC},10\odot}$  和溫度  $T_{\text{bh},10\odot}$ 。

[4]

- (c) **黑洞的質量損失**：假設霍金輻射是從事件視界發出的。

利用質能等價關係，推導出質量損失率  $dM_{\text{bh}}(t)/dt$  的表達式，用黑洞的質量  $M_{\text{bh}}(t)$  和物理常數表示。

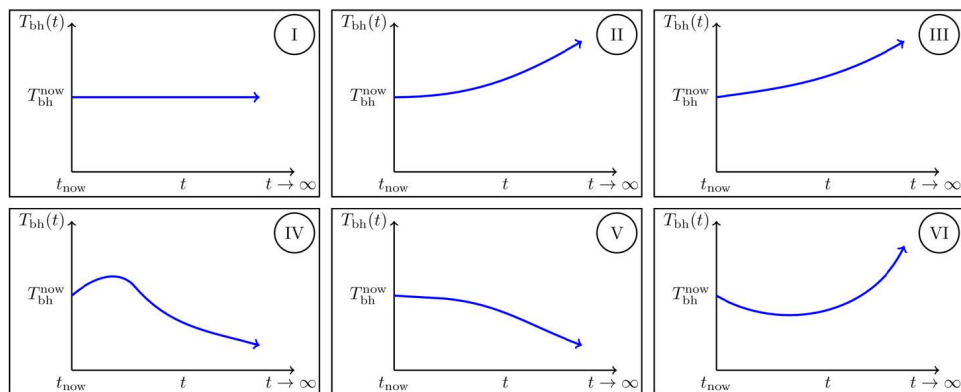
因此，得到一個黑洞質量  $M_{\text{bh}}(t)$  的表達式，該黑洞初始質量為  $M_0$ 。繪制  $M_{\text{bh}}(t)$  隨時間  $t$  從  $M_{\text{bh}} = M_0$  到  $M_{\text{bh}} = 0$  的變化曲線。

[8]

- (d) **黑洞的壽命**：獲得一個表達式，表示初始質量為  $M_0$  的黑洞由於霍金輻射完全蒸發的時間  $\tau_{\text{BH}}$ ，用  $M_0$  和物理常數表示。計算初始質量為  $M_0 = 10M_{\odot}$  的黑洞的壽命  $\tau_{\text{BH},10\odot}$ （以秒為單位）。

- (e) **黑洞在 CMB 輻射浴中**：考慮一個在太空中孤立存在的黑洞，遠離其他天體。該黑洞當前溫度為  $T_{\text{bh}}^{\text{now}}$ ，被當前溫度為  $T_{\text{cmb}}^{\text{now}} = 2.7 \text{ K}$  的宇宙微波背景 (CMB) 包圍。黑洞可以通過吸收 CMB 輻射來增加質量，同時由於霍金輻射而失去質量。考慮到宇宙的加速膨脹，識別以下圖中哪些圖顯示了  $T_{\text{bh}}$  在以下三種情況下的長期時間演化：

(X)  $T_{\text{bh}}^{\text{now}} > T_{\text{cmb}}^{\text{now}}$ , (Y)  $T_{\text{bh}}^{\text{now}} = T_{\text{cmb}}^{\text{now}}$ , (Z)  $T_{\text{bh}}^{\text{now}} < T_{\text{cmb}}^{\text{now}}$ .



將每個案例 X、Y 和 Z 與相應的圖表匹配。在總結答題紙中用表格表達你的答案，每行只選一個框。

[6]

- (2) 原初黑洞 (PBHs) 能夠在極早期宇宙中形成，其質量要小得多。所有以下問題都與 PBHs 有關。這裡忽略任何增加黑洞質量的過程。



- (a) **PBH 在當前時代蒸發：**正如您可能已經注意到的，從之前問題的答案來看，太陽質量的黑洞需要很長時間才能蒸發。然而，由於 PBH 可以具有遠小於太陽質量的黑洞，因此我們可能在當前時代看到它們蒸發。

找出一個可以在現在時代完全蒸發的黑洞的初始質量  $M_{0,\text{PBH}}$ （以千克為單位）、施瓦茨希爾德半徑  $R_{\text{SC,PBH}}$ （以米為單位）和溫度  $T_{\text{PBH}}$ （以開爾文為單位），即壽命  $\tau_{\text{PBH}} = 140$  億年的一個黑洞。 [4]

- (b) **PBH 的形成：**在輻射主導的早期宇宙中，尺度因子隨時間變化為  $a(t) \sim t^{1/2}$ 。在這個時期，PBH 形成於物理尺寸為  $ct$  的區域中所有能量的坍縮，其中  $t$  是當時宇宙的年齡。

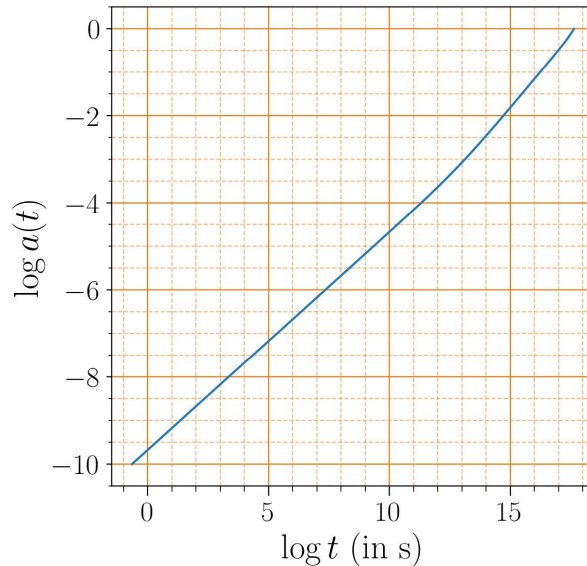
一個質量為  $1 \times 10^{12}$  kg 的原初黑洞在宇宙年齡約為  $1 \times 10^{-23}$  s 時形成。計算當一個質量為  $1 \times 10^{20}$  kg 的原初黑洞形成時，宇宙的年齡  $t_{20}$  是多少。 [6]

- (c) **觀測到的 PBH 霍金輻射光譜：**考慮一個初始質量為  $1 \times 10^{10}$  kg 的 PBH，在其壽命  $\tau_{\text{PBH}}$  結束時完全蒸發。對於這一部分，假設大部分的霍金輻射是在此時發射的，對應的溫度與其初始質量有關。將宇宙的尺度因子假設為按  $a(t) \sim t^{2/3}$  演化。計算此時霍金輻射在地球觀測到的峰值波長  $\lambda_{\text{earth}}$ ，在當前時代（ $t = 140$  億年）。

[5]

- (d) **來自 PBH 的高能宇宙輻射：**現在假設在某一時刻發射的霍金輻射對應於能量為  $k_{\text{B}}T_{\text{bh}}(t)$  的光子。此外，黑洞的最高可能溫度是普朗克溫度  $T_{\text{Planck}}$ ，其中  $k_{\text{B}}T_{\text{Planck}} = 1 \times 10^{19}$  GeV。

尺度因子在相關時間尺度上的演化情況如下面的圖所示。當前的尺度因子被設定為 1。時間軸上的  $t$  (s) 表示宇宙的年齡，單位為秒。



如果在地球上觀測到一個能量為  $E_{\text{det}} = 3.0 \times 10^{20}$  eV 的光子，確定可能負責該光子的 PBH 的初始質量的最大值和最小值（分別表示為  $M_0^{\text{max}}$  和  $M_0^{\text{min}}$ ）。 [10]